

Leonhard EULER

F. KOUTNÝ, Zlín



(asi 1756)

(15. 04. 1707 – 18. 09. 1783)

Leonh. Euler



Kompilace sestavená z literárních pramenů a webových stránek o životě a díle jednoho z nejvýznamnějších matematiků všech dob. Historické téma Eulerova života je doplněno výkladem, ilustracemi a komentáři k jeho nejdůležitějším pracím v současném duchu.

OBSAH

	Str.
1. MILNÍKY V MATEMATICE PŘED EULEREM	1
1.1. <i>Algebra</i>	2
1.2. <i>Logaritmy</i>	4
1.3. <i>Teorie čísel</i>	7
1.4. <i>Geometrie</i>	10
1.5. <i>Analýza</i>	11
1.6. <i>Diferenciální rovnice, mechanika a další rozvoj matematiky</i>	15
2. LEONHARD EULER – ŽIVOTNÍ DRÁHA	19
3. EULEROVY MATEMATICKÉ PRÁCE	25
3.1. TEORIE ČÍSEL	25
3.2. GEOMETRIE A TOPOLOGIE	27
3.3. ANALÝZA	31
3.3.1. ČÍSLO e , EXPONENCIÁLA, LOGARITMUS	32
3.3.2. ŘADY A NEKONEČNÉ SOUČINY, ČÍSLO γ	38
3.3.3. VÝPOČET INTEGRÁLŮ	44
3.3.4. FUNKCE BETA A GAMMA	45
3.3.5. EULEROVA–MACLAURINOVA FORMULE	50
3.4. DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE	52
3.5. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE	53
3.6. VARIČNÍ POČET	57
4. EULEROVY STOPY VE FYZICE	63
4.1. ŘEMENOVÝ POHON	63
4.2. OHYB NOSNÍKU	64
4.3. VZPĚŘ NOSNÍKU. EULEROVO KRITICKÉ ZATÍŽENÍ	65
4.4. MAUPERTUISŮV–EULERŮV PRINCIP	66
4.5. MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA	70
4.6. EULEROVA HYDRODYNAMICKÁ ROVNICE	73
4.7. TSUNAMI	74
5. DOSLOV	77
6. ODKAZY	79

1. MILNÍKY V MATEMATICE PŘED EULEREM

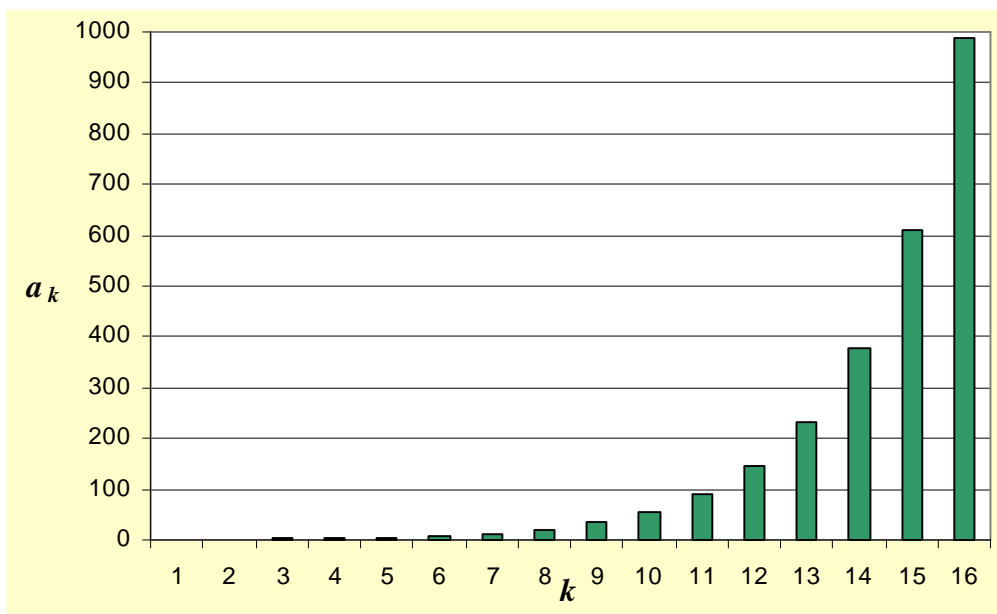
Nejstarší doklady o něčem víc než o pouhém sčítání předmětů pocházejí z Babylonie (2000 př. K.). Tam vznikla číselná soustava se základem 60 [1]. Zkoumala se celočíselná řešení rovnice $a^2 + b^2 = c^2$, tj. hledaly se Pythagorejské trojúhelníky. Bylo známo řešení kvadratické rovnice $x^2 + bx + c = 0$, byla tabelována řešení kubické rovnice $x^3 + bx = c$, řešily se problémy podobnosti, počítaly se plochy a objem a používalo se odhadu $\pi \approx 3\frac{1}{8}$. Babyloňané dokonce používali speciálního typu Fourierovy analýzy k výpočtu efemerid [2,3].

Některé z těchto poznatků měli i staří Egypťané a lze si těžko představit, že by bez nich postavili např. Velkou pyramidu u Gízy (kolem 2650 př. K.) [4].

Zatím však šlo pouze o jednotlivé problémy a jejich řešení. Skutečný systém poznatků a matematiku jako vědeckou disciplínu vytvořili teprve Řekové. Rozkvět řecké kultury a matematiky začal asi 450 let př. K. [5]. Z této a pozdější doby pocházejí věty a zákony spojené se jmény Euklides, Pythagoras, Archimédes, které zná každý školák a které nás dodnes plní obdivem.

Později se Řecko stalo římskou provincií a nastal úpadek evropské matematiky. Za zachování řecké matematiky a další rozvoj matematiky vdčíme mimoevropským národům, zejména Arabům. S římskými číslicemi se dá těžko násobit a dělit, takže byly použitelné jen pro sčítání a odčítání. Italští obchodníci z Janova, Benátek atd. byli v kontaktu s Orientem a jejich prostřednictvím se matematika vrátila zpět do Evropy.

Po zhruba 1000leté přestávce se objevuje Leonardo z Pisy, zvaný Fibonacci, který r. 1202 napsal Liber Abaci. Fibonacciho jméno nese posloupnost $\{a_k\} = \{1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$ zadaná pro $k = 3, 4, \dots$ předpisem $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$.



Obr. 1 – Fibonacciova posloupnost $\{1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$.

Fibonacciova posloupnost velmi rychle roste a dá se přirozeně zobecnit na aditivní posloupnosti [6]. Důležité je, že v Liber Abaci se používaly arabské číslice, zlomky a dekadická soustava [7]. To usnadnilo další rozvoj počítání i matematiky. V té době začal růst význam vzdělání a v Evropě se začala vytvářet síť universit (Bologna 1088, Paříž 1090, Oxford 1096, ..., Cambridge 1209, ..., Praha 1348, ...) [8].

1.1. Algebra

O tři století později (16. století) je už známo algebraické řešení kubické rovnice. Scipio del Ferro redukoval dělením $a_3 \neq 0$ a substitucí $u = x - a_2/(3a_3)$ kubickou rovnici

$$a_3u^3 + a_2u^2 + a_1u + a_0 = 0 \quad \text{do typů}$$

$$x^3 + px = q, \quad x^3 - px = q, \quad x^3 - px = -q, \quad p, q > 0$$

a říkal, že našel jejich řešení. Zemřel však 1526, aniž své výsledky publikoval. Postup řešení znovu objevil 1535 Tartaglia z Benátek a rovněž jej uchovával v tajnosti. Prozradil jej po dlouhém naléhání lékaři Hieronymovi Cardanovi z Milána, který mu slíbil mlčení. Cardano však 1545 vydal knihu o algebře Ars magna. Jakmile Tartaglia zjistil, že je v ní publikován výklad jeho metody, rozhořel se jeden z velmi známých prioritních sporů (jiný – Newton/Leibniz – známe z pozdějšího období kolem roku 1700). Nicméně v literatuře o řešení algebraických rovnic se pro kořeny redukované kubické rovnice

$$x^3 + px - q = 0$$

dodnes uvádí vzorec

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{p_{1/3}^3 + q_{1/2}^2} + q_{1/2}} - \sqrt[3]{\sqrt{p_{1/3}^3 + q_{1/2}^2} - q_{1/2}}, \quad \text{kde } p_{1/3} = p/3, q_{1/2} = q/2,$$

pod Cardanovým jménem [9,10].

Poznamenáváme, že počítání s tímto vzorcem je složité. I v případě úspěšnosti vyžaduje značnou pozornost a není pro obyčejnou kalkulačku. Vhodnější je EXCEL. Např. u rovnice $x^3 + 12x - 2 = 0$ je

$$p_{1/3} = 4, \quad q_{1/2} = 1, \quad \sqrt{p_{1/3}^3 + q_{1/2}^2} = 8.062257748,$$

$$s_1 = \sqrt[3]{\sqrt{p_{1/3}^3 + q_{1/2}^2} + q_{1/2}} = 2.084869151, \quad s_2 = \sqrt[3]{\sqrt{p_{1/3}^3 + q_{1/2}^2} - q_{1/2}} = 1.918585633$$

a kořen $x_1 = s_1 - s_2 = 0.166283519$.

Pro výpočet reálných kořenů kubické rovnice na zadaný počet desetinných míst je proto vhodnější použít některou numerickou metodu řešení obecné rovnice $f(x) = 0$ se spojitou levou stranou [3].

Vezmeme-li kubickou rovnici např. v redukovaném tvaru, je její levá strana $l(x) = x^3 + px - q$ diferencovatelnou funkcí. Pro $x^2 > |p|/3$ má kladnou derivaci, $dl(x)/dx = 3x^2 + p > 0$ a $l(x)$ je tedy rostoucí. Dále $\lim_{x \rightarrow -\infty} l(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = +\infty$. Podle Bolzano–Weierstrassovy věty existuje x takové, že $l(x) = 0$, tedy kubická rovnice s reálnými koeficienty má vždy aspoň jeden reálný kořen. Obecněji: každá algebraická rovnice lichého stupně s reálnými koeficienty má reálný kořen.

Algebraické řešení rovnic bylo podnětné tím, že přivádělo matematiky k novým číselným oborům. Např. rovnice $x + 2 = 0$ vede k zápornému číslu $x = -2$, $x^2 - 2 = 0$ vede k iracionálnímu číslu $\sqrt{2}$, $x^2 + 2 = 0$ vede k imaginárnímu číslu $x = i\sqrt{2}$ atd. Tyto

pojmy se úsilím mnoha matematiků postupně do matematiky začlenily a dnes jich používáme samozřejmě. K důslednému používání komplexních čísel přispěl Raffael Bombelli knihou Algebra (1572), kterou později studovali G. W. Leibniz i L. Euler.

Uvažujme znovu kubickou rovnici $x^3 + 12x - 2 = 0$. Lze ji psát ve tvaru

$$0 = x^3 + 12x - 2 = (x - x_1)(x^2 + ax + b),$$

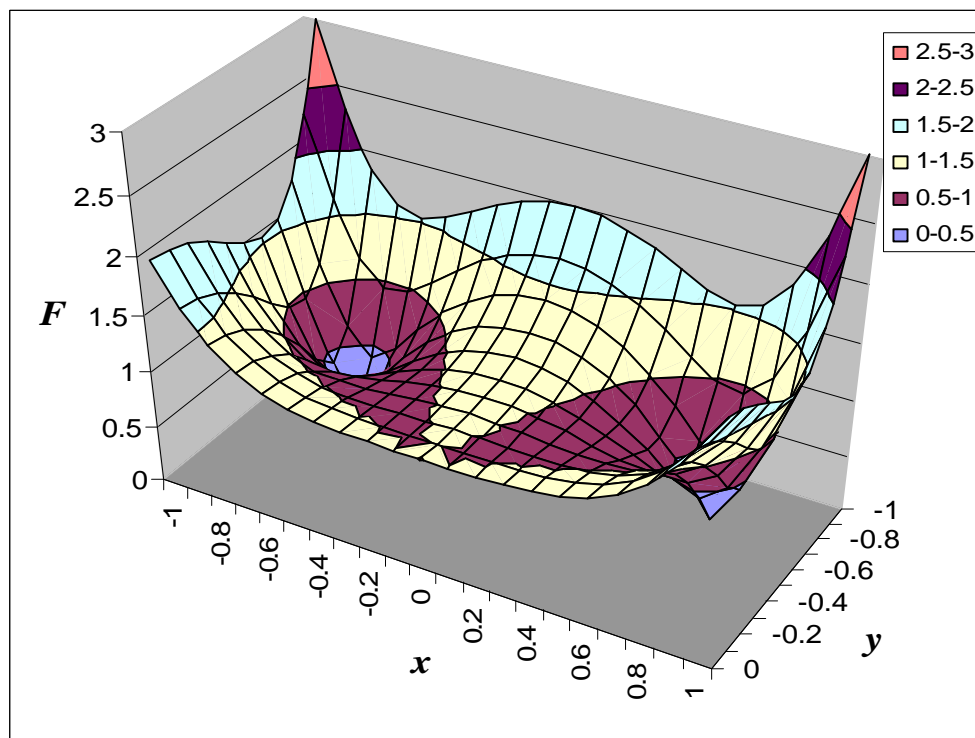
kde $x_1 = 0.166283519$ je její první kořen určený třeba numericky. Roznásobením pravé strany a srovnáním koeficientů stejných mocnin x najdeme

$$a = x_1, \quad b = 2/x_1.$$

Další dva kořeny kubické rovnice $x^3 + 12x - 2 = 0$ jsou tedy kořeny kvadratické rovnice $x^2 + x_1x + 2/x_1 = 0$,

$$x_{2,3} = -\frac{1}{2} \left(x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 8/x_1} \right) = -0.083141759 \pm 3.467093544 i.$$

Krátce po řešení kubické rovnice se podařilo také řešit rovnici 4. stupně převedením na součin dvou kvadratických trojčlenů. Rovnice vyšších stupňů se algebraicky obecně řešit nedají. Trvalo víc než 2 století, než nemožnost algebraického řešení rovnice 5. stupně dokázal N. H. Abel (1802–1829). Úplné řešení problému algebraické řešitelnosti rovnic stupně ≥ 5 podal E. Galois (1811–1832). Úvahy o řešitelnosti jej vedly k vytvoření základů teorie grup [5,11].



Obr. 1.2 – Funkce $F(x, y) = |(x+iy)^4 + 1|$ na intervalu $[-1, 1] \times [-1, 0]$.

Úlohu konstruktivního řešení algebraické rovnice $P(z) = 0$, kde P je polynom s komplexními koeficienty, lze převést na problém najít minimum vhodné spojitě

funkce dvou proměnných (reálné a imaginární složky komplexní proměnné $z = x + iy$), třeba absolutní hodnoty polynomu P ,

$$F(x, y) = |P(z)| = (|\operatorname{Re}(x+iy)|^2 + |\operatorname{Im}(x+iy)|^2)^{1/2} \longrightarrow \min.$$

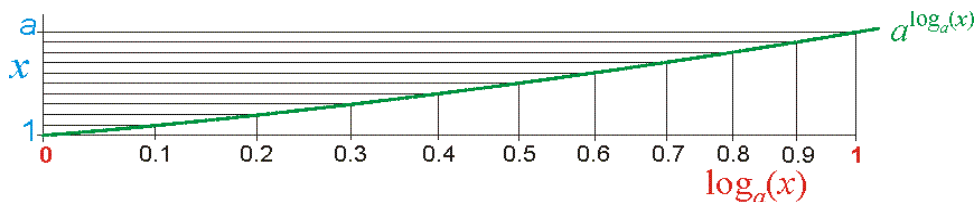
Příklad je na obr. 1.2 pro jednoduchý polynom $P(z) = z^4 + 1$. Protože kořeny polynomu s reálnými koeficienty jsou komplexně sdružené, stačí pracovat v polorovině $y \leq 0$ nebo $y \geq 0$. K hledání minima se zvolenou přesností lze použít genetického algoritmu [3], o kterém pojednávala už přednáška [12].

1.2. Logaritmy

Složitější aritmetické výpočty, zejména násobení a dělení, pomohla usnadnit souvislost geometrické posloupnosti mocnin $a > 0$ s aritmetickou posloupností exponentů,

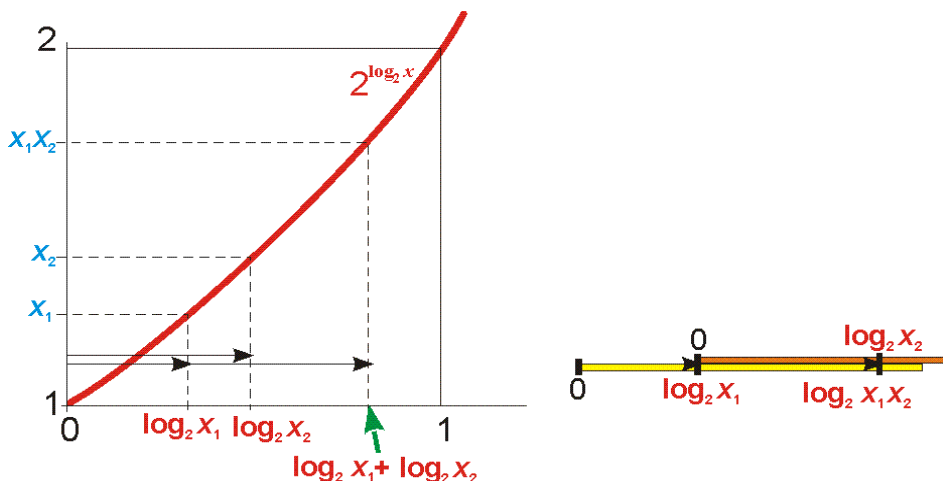
$$a^1, a^2, a^3, \dots \longleftrightarrow 1, 2, 3, \dots$$

Řešení rovnic $a^x = 1$, $a^x = 1 + h$, ..., $a^x = a - h$, a vytvářejí na reálné ose logaritmickou stupnici s proměnným krokem (obr. 1.3).



Obr. 1.3 – Konstrukce logaritmické stupnice na horizontální ose.

Součin kladných čísel $b, c > 0$ se dá počítat tak, že se nějakým způsobem (interpolací) najdou exponenty β, γ takové, že $b = a^\beta, c = a^\gamma$. Tyto exponenty se sečtou, $\beta + \gamma = \delta$, a vypočte se mocnina a^δ . Zřejmě $a^\delta = a^{\beta+\gamma} = a^\beta a^\gamma = bc$ (obr. 1.4).



Obr. 1.4 – Sčítání logaritmů znamená násobení jejich argumentů.

Myšlenku převést násobení na sčítání uveřejnil jako první skotský baron John Neper (Napier) 1614. Nezávisle se stejnou myšlenkou přišel 6 let před ním Švýcar Joost Bürgi (1588), ale publikoval ji teprve na příkaz Johanna Keplera 4 roky po Neperovi [13].

Ze slov *logos* = proporce a *arithmos* = číslo Neper sestavil název logaritmus. Vlastní metodou Neper vypočítal tabulku logaritmů, která odpovídala základu $\approx e^{-1}$, ale pojem základu ještě neznal. S ideou logaritmů seznámil svého přítele Henryho Briggse a oba se dohodli na základě $a = 10$. Briggs 1617 publikoval tabulku 8místných dekadických logaritmů celých čísel od 1 do 1000. Po Neperově smrti (1617) Briggs vypracoval obšírné tabulky dekadických logaritmů, které 1624 publikoval v knize *Arithmetica logarithmica*.

Přirozené logaritmy \ln se objevily v souvislosti s exponenciální funkcí e^x , kde $e = 2.71828\ 18284\ 59045\dots$. První tabulku $\ln x$ vypracoval John Speidell 1619. Funkce e^x má tu skvělou vlastnost, že je invariantem derivování, $e^x = (e^x)' = (e^x)'' = (e^x)''' \dots$ (užíváme Lagrangeova označení $'$ místo d/dx , $''$ místo d^2/dx^2 , ...), a integrace. Exponenciální funkce a logaritmus jsou vzájemně inverzní funkce a na výpočet $\log_a u$ lze nahlížet jako na úlohu najít řešení rovnice $f(x) = a^x - u = 0$. To vzhledem k monotonii a spojitosti mocninné funkce není při použití počítače obtížné.

Aby se při ručním počítání daly operace s logaritmy provádět efektivně, musely být pro zvolený základ a při dosti bohaté posloupnosti $\{u_i\}$ vypracovány tabulky exponentů. Dříve zmíněná Fibonacciova posloupnost ukazuje, že už vhodný zápis sám o sobě může inspirovat. Může např. stačit k tomu, aby se začalo uvažovat o nekonečných procesech.

Příkladem může být vytváření nekonečných posloupností, součtu a součinu jejich členů (řad a nekonečných součinů), nebo tvorba výrazů

$$(1) \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \dots}}}, \quad (2) \frac{1}{c + \frac{1}{c + \frac{1}{c + \dots}}} \quad \text{atd.}$$

S těmito objekty se zacházelo občas nekorektně. Světlo přinesla teprve definice limity vyslovená v 19. století B. Bolzanem (1781-1848) a A. L. Cauchym (1789-1857) [14]. Takže dnes můžeme uvažovat např. takto:

(1) Je-li $c > 0$ a existuje-li konečné $C = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \dots}}}$, je také $C = \sqrt{c + C}$. Pak $C^2 = C + c$ a

tato kvadratická rovnice má kořeny $C_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + c}$. Kladný kořen je $C_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c}$.

(2) Je-li $c \neq 0$ a existuje-li konečné $C = \frac{1}{c + \frac{1}{c + \frac{1}{c + \dots}}}$, je $C = \frac{1}{c + C}$, takže $C^2 + cC - 1 = 0$. Příslušný

kořen je $C_1 = -\frac{c}{2} + \text{sign}(c) \sqrt{\frac{c^2}{4} + 1}$. Např. pro $c = -8$ dostaneme $C_1 = 4 - \sqrt{17} = 0.1231056\dots$

Jak vlastně počítali Neper, Briggs, Speidell logaritmy, jsem nevypátral. Dnes je to ale pro matematiku pouhá historie. Je téměř jisté, že používali nějaké řady.

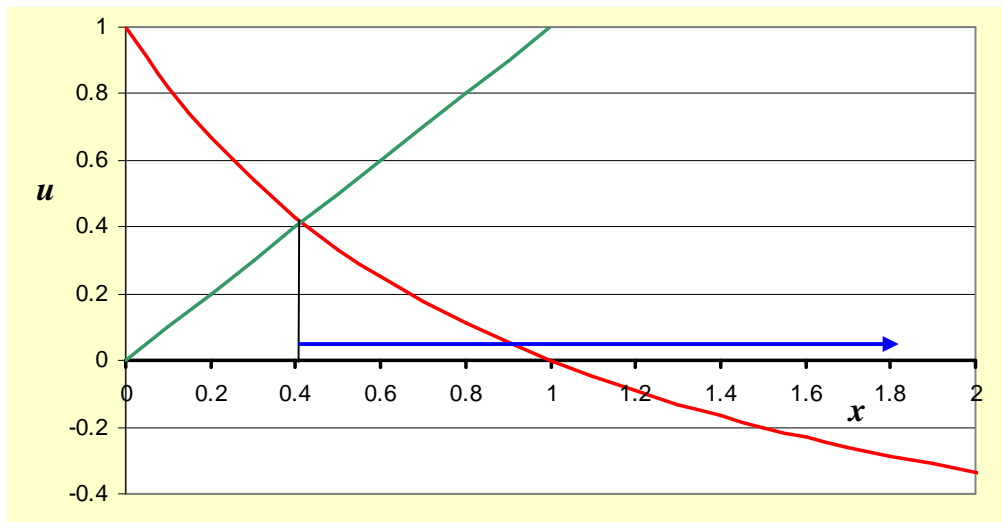
V základech diferenciálního počtu se odvozuje Taylorův rozvoj

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Řada vpravo je konvergentní pro $-1 < x \leq 1$, ale konverguje rychle jen pro x v těsném okolí 0. Např. pro výpočet $\ln 2$ na 6 míst, tedy pro $x = 1$, bychom potřebovali 1 000 000 členů.

Podstatné zrychlení konvergence pro větší $x > 0$ přináší substituce (obr. 1.5).

$$x(u) = \frac{1-u}{1+u} \text{ nebo inverzně } u(x) = \frac{1-x}{1+x}$$



Obr. 1.5 – Graf funkce $u(x) = \frac{1-x}{1+x}$ (a $u(x) = x$).

Pak

$$\begin{aligned} \ln x = \ln \frac{1-u}{1+u} &= \ln(1-u) - \ln(1+u) = \left(-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} - \dots\right) \\ &\quad - \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} + \dots\right) \\ &= -2 \left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \dots\right) = \Sigma(u). \end{aligned}$$

Řada $\Sigma(u)$ konverguje rychle pro u blízká 0, tj. x blízká 1 ($u(x) < x$ pro $x > \sqrt{2}-1$).

Chceme-li pro základ $a > 0$ a nějaké $x > a$ počítat $\log_a x$, dělíme postupně x číslem a tolikrát, až dostaneme podíl mezi 0 a 1. Např. pro $a = e$ ($= 2.71828\dots$)

$$100 = 36.78794412 e = 13.53352832 e^2 = \dots = 0.673794699 e^5,$$

$$\ln 100 = \ln 0.673794699 + \ln e^5 = \ln 0.673794699 + 5.$$

Položme $x = 0.673794699$, $u = \frac{1-x}{1+x} = 0.19488967$. Členy $a_k = \frac{u^k}{k}$ následují v tabulce.

k	a_k
1	0.1948896727
3	0.0024674322
5	0.0000562308
7	0.0000015255
9	0.0000000451
11	0.0000000014
Součet	0.1974149077

Protože a_k mají stejné znaménko, odhadujeme chybu R_n při přerušení součtu za členem a_n takto:

$$R_n = \frac{u^{n+2}}{n+2} + \frac{u^{n+4}}{n+4} + \dots < \frac{u^{n+2}}{n+2} (1 + u^2 + u^4 + \dots) = \frac{u^{n+2}}{n+2} \frac{1}{1-u^2}.$$

V našem případě $R_n < 4.7 \times 10^{-11}$ a $\ln 100 \approx 5 - 2 \times 0.1974149077 \approx 4.605170186$ ($\ln 0.673794699 \approx -0.394829815$).

Logaritmus se základem $a > 0$ se vypočte pomocí přirozeného logaritmu podle vztahu

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

$$\text{Např. } \log_{100} 3 = \frac{\ln 3}{\ln 100} \approx \frac{1.098612289}{4.605170186} \approx 0.2385606273, \quad \log_{\pi} 3 = \frac{\ln 3}{\ln \pi} \approx 0.959713\dots$$

Protože jsme zvyklí pracovat s čísly v desítkové soustavě, tj. reprezentovat čísla jako součet násobků mocnin 10, je nejpohodlnější pracovat s dekadickými logaritmy. S tímto účelem se jako technická pomůcka dříve používalo logaritmické pravítko se stupnicemi dekadických logaritmů. Po nástupu elektronických kalkulaček před 20–30 lety se velmi rychle stala anachronismem. Více o logaritmech je uvedeno např. v [15].

1.3. Teorie čísel

V teorii čísel se většinou pracuje s přirozenými čísly, tj. prvky množiny $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Opakovaným sčítáním se tvoří násobky. Např. sudá čísla jsou dvojnásobky přirozených čísel. Operacemi sčítání a násobení z oboru přirozených čísel nevybočíme. Odčítání vede k 0 a záporným číslům $\{-1, -2, -3, \dots\}$. Sjednocením těchto množin dostáváme obor celých čísel $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Bohatší výsledky přináší operace dělení. Jsou-li $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$ a je-li $p = n/m$ celé, říkáme, že n je násobkem m , n je dělitelné m , m je dělitelem n atd. Libovolná m, n můžeme dělit, $n/m = c + r$, kde c je celá část, $c \in \{0, 1, 2, \dots\}$ a $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ je zbytek. Tak se množina celých čísel pro dané m , modul, rozpadá do m zbytkových tříd. To, že číslo n patří do zbytkové třídy r , tj. $n = cm + r$ se od Gaussových dob zapisuje

$$n \equiv r \pmod{m}$$

a čte: n je kongruentní r modulo m .

Dělitelnost celých čísel tvoří rozsáhlou kapitolu tradiční algebry. Při manipulaci s čísly se objevují různé zákonitosti a snadno vznikají různé hypotézy.

Zvolme $n \in \mathbb{N}$ a pišme je v dekadickém tvaru, tj. jako

$$n = n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0 = n_k 10^k + \dots + n_1 10^1 + n_0 10^0.$$

Protože všechny kladné mocniny 10 jsou sudé, rozhoduje o tom, zda $n \in \mathbb{N}$ je sudé či liché jen poslední číslice. Zda je n dělitelné 3 se vyšetří také snadno. Každá kladná mocnina 10 dává po dělení 3 zbytek 1, takže

$n = n_k (3m_k + 1)^k + \dots + n_1 (3 \times 3 + 1) = M \times 3 + (n_k + \dots + n_0)$ a n je dělitelné 3 právě když součet jeho cifer $n_k + \dots + n_0$ je dělitelný 3, tj. $n \equiv (n_k + \dots + n_0) \pmod{3}$.

0	0	0	0
1	7	7	
2	14	4	
3	21	1	1
4	28	8	
5	35	5	
6	42	2	2
7	49	9	
8	56	6	
9	63	3	3
10	70	0	
11	77	7	
12	84	4	4
13	91	1	
14	98	8	
15	105	5	5
16	112	2	
17	119	9	
18	126	6	6
19	133	3	
20	140	0	
21	147	7	7
22	154	4	
23	161	1	
24	168	8	8
25	175	5	
26	182	2	
27	189	9	9

Ve vedlejší tabulce jsou ve druhém sloupci 0 a přirozené násobky 7. Ve 3. sloupci jsou poslední číslice. Procházel se číslice ve 3. sloupci s krokem 3, dostane se posloupnost $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ve 4. sloupci. Ve 3. sloupci se v každých 10 po sobě jdoucích řádcích vystřídají všechny číslice dekadické soustavy. Vezmeme-li podobnou tabulku násobků 3, 13, 23, ... museli bychom místo 30 členů vzít 70, abychom s krokem 7 prošli posloupnost $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. U 9 je to krok 9 u 1 krok 1. Členy posloupnosti násobků 5 končí jen na 0 nebo 5, u všech sudých čísel na 0, 2, 4, 6, 8 atd. Tak se při psaní čísel jaksi automaticky může vynořit řada otázek, ale ty většinou vedou k jednoduchým zákonitostem.

Z antiky známe *Euklidův algoritmus* (Eukleidés z Megar, asi 450–380 př. K.) pro nalezení největšího společného dělitele dvou celých čísel, resp. polynomů. Jen pro osvěžení: dělitelé se cyklicky dělí zbytky, dokud není zbytek 0. Poslední dělitel je největší společný.

Pro ilustraci uvádíme 2 příklady.

1. Pro čísla 2424 a 1992

$$\begin{array}{rcll}
 2424 & : & 1992 & = & 1 & (432) \\
 1992 & : & 432 & = & 4 & (264) \\
 432 & : & 264 & = & 1 & (168) \\
 264 & : & 168 & = & 1 & (96) \\
 168 & : & 96 & = & 1 & (72) \\
 96 & : & 72 & = & 1 & (24) \\
 72 & : & \underline{24} & = & 3 & (0)
 \end{array}$$

2. Pro polynomy

$$\begin{array}{rcll}
 x^4-1 & : & x^2+2x+1 & = & x^2 \\
 x^4+2x^3+x^2 & & & & \\
 -2x^3-x^2-1 & : & x^2+2x+1 & = & -2x \\
 -2x^3-4x^2-2x & & & & \\
 3x^2+2x-1 & : & x^2+2x+1 & = & 3 \\
 3x^2+6x+3 & & & & \\
 -4x-4 & & & & \\
 \hline
 x^2+2x+1 & : & -4x-4 & = & -x/4 \\
 x^2+x & & & & \\
 x+1 & : & -4x-4 & = & -1/4 \\
 \underline{x+1} & & & & \\
 0 & & & &
 \end{array}$$

Prvočísla

Je-li $n \in \mathbb{N}$ dělitelné pouze 1 a samým sebou, nazývá se *prvočíslo*. Už Euklides dokázal, že prvočísel je nekonečně mnoho. Jeho důkaz je skvělým příkladem důkazu sporem.

Kdyby totiž prvočísel p bylo konečně mnoho, vytvořila by množinu $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ o m prvcích. Avšak číslo $q = p_1 \dots p_m + 1 \in \mathbb{N}$ není dělitelné žádným z nich, proto by samo bylo prvočíslem. Tedy $q \in P$, a současně $q \notin P$ ($q \neq p_k, k = 1, \dots, p_m$).

Složitější je *malá Fermatova věta*:

Je-li p prvočíslo a m přirozené číslo, je $m^p - m$ dělitelné p , tedy $m^p \equiv m \pmod{p}$.

Důkaz lze najít v každé učebnici algebry, tedy např. v [9,11] a na webu.

Např. $4^5 - 4 = 1020 = 204 \times 5$, $3^5 - 3 = 240 = 48 \times 5$ nebo $3^7 - 3 = 2184 = 312 \times 7$.



Pierre de Fermat (1601–1665)

Pierre de Fermat (1601–1665) je znám hlavně jako autor tohoto tvrzení:

Velká Fermatova věta. Rovnice $x^n + y^n = z^n$ je v oboru přirozených čísel řešitelná jen pro $n = 1, 2$.

Fermat si na okraj latinského překladu Diofantova spisu poznamenal, že našel podivuhodný důkaz tohoto tvrzení. Trvalo však téměř 3 století, než tuto větu 1994 dokázal Andrew Wiles. Jeho důkaz je tak dlouhý, že zabírá knihu. Dnes se má obecně zato, že Fermat se prostě mýlil.

Jistě se ale mýlil, když se domníval, že všechna čísla $2^{2^n} + 1$ jsou prvočísla. Ale o tom už byla zmínka v přednášce o Gaussovi [16] a k Fermatovým číslům se ještě vrátíme později (odst. 3.1).



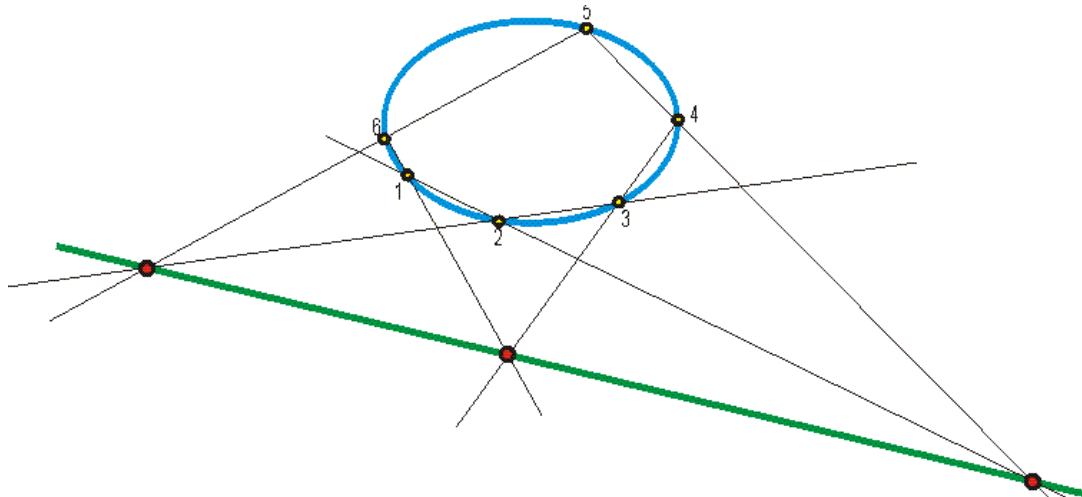
Blaise Pascal (1623–1662)

Fermat si dopisoval s B. Pascalem (1623–1662). Oba tyto Francouze lze považovat za zakladatele nové matematické disciplíny – teorie pravděpodobnosti [17]. Oba lze také považovat za průkopníky metod diferenciálního počtu – pro přírůstky nezávisle a závisle proměnné používali metodu charakteristického trojúhelníka. Fermat odvodil metodu hledání extrémů reálné funkce jedné proměnné [12]. Pascal je znám zákonem z mechaniky tekutin (tlak v tekutině nezávisí na směru), postavil mechanickou kalkulačku atd. Uvažoval také o integrálním počtu a na jeho dílo navázal později Leibniz.

1.4. Geometrie

V 16. a 17. století vyšly v Evropě latinské překlady řeckých antických autorů. Euklides 1482, Archimédes 1558, Diofantos 1621 a další [5]. Euklidovo dílo tvořilo svou architekturou vzor i pro ostatní matematické disciplíny.

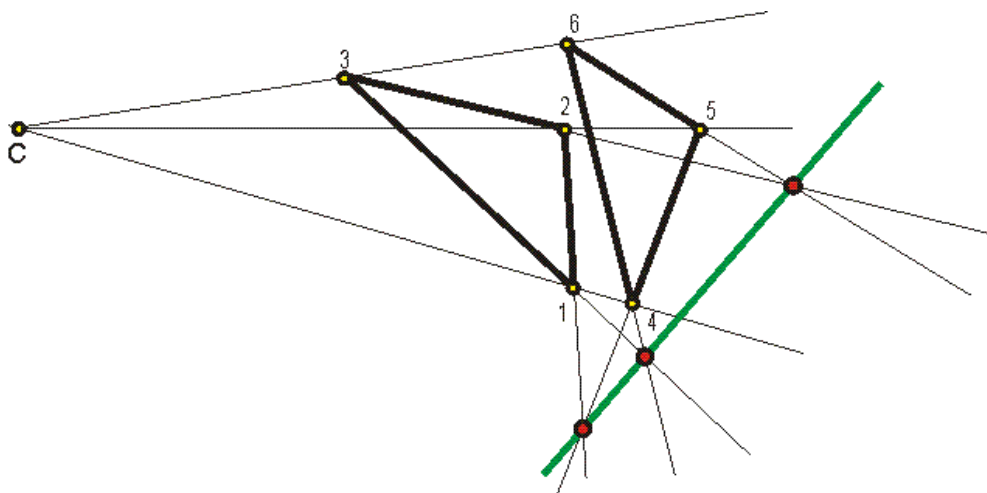
Studium řecké matematiky bylo samozřejmě inspirací. Např. Pascal v 16 letech objevil větu o kuželosečkách znázorněnou na obr. 1.6.



Obr. 1.6 – Pascalova věta pro elipsu: průsečíky přímek 12 a 45, 16 a 34, 23 a 56 leží na jedné přímce.

Je to jedna z vět projektivní geometrie. Jiná, Desarguesova věta, která Pascalovi sloužila jako vzor pro prezentaci jeho věty [5], je na obr. 1.7. Pascal vynalezl např. barometr, hydraulický lis, injekční stříkačku.

Gérard Desargues (1591–1661) je považován za zakladatele projektivní geometrie [19]. Jeho antickým předchůdcem byl Pappus z Alexandrie, který žil kolem roku 300 (pozoroval zatmění Slunce 18. října 320). V projektivní geometrii se uvádí např. Pappova věta [20].



Obr. 1.7 – Desarguesova věta: průsečíky prodloužených stran 12 a 45, 13 a 46, 23 a 56 leží na jedné přímce.

V 17. století žil také filosof a matematik René Descartes (1596–1650) [21], mezi jehož zásluhy patří nalezení souvislosti mezi algebrou a geometrií. To později vedlo k vytvoření analytické geometrie. Ukázal, že mnoho geometrických problémů se dá transformovat na algebraické úlohy. Tím položil jeden ze základních kamenů pro vznik matematické analýzy, tj. počítání s infinitesimálními veličinami, které Newton a Leibniz



René Descartes (1596–1650)

rozvinuli později do tzv. kalkulu. Jeho *Geometrie* (1637) však neobsahuje ani kartézské souřadnice ani rovnice přímk, kuželoseček nebo kvadratických ploch [5].

Descartes je známý především díky rčení *Cogito ergo sum* (= Uvažuji, tedy existuji) a rozpracováním filosofie v *Meditacích o prvotní filosofii*, mechanickým pojetím světa a atomismem, objevem zákona zachování momentů v mechanice, diskusí o metodách uvažování. Z algebry známe Descartesovo pravidlo: počet kladných kořenů reálného polynomu je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti jeho koeficientů seřazené podle stupně mocnin proměnné minus sudé číslo [22].

Descartes se snad jako mladý šlechtic účastnil bitvy na Bílé hoře 8. listopadu 1620 v císařském vojsku. Později jej, už jako slavného filosofa, pozvala královna Kristina do Švédska. Tamější studené podnebí mu však nesvědčilo a po krátkém pobytu zemřel ve Stockholmu na zápal plic [20]. Po jeho smrti královna Kristina abdikovala a přestoupila na katolickou víru.

1.5. Analýza

Ideje manipulace s nekonečně malými, infinitesimálními veličinami se zrodily už ve starém Řecku. Zvyšováním počtu stran pravidelného mnohoúhelníka získal Archimédes (?287–212 př. K.) odhady čísla π : $3^{10}/71 < \pi < 3^{1/7}$. Výpočet a tabulka obsahu pravidelných 2^n úhelníků vepsaných do jednotkového kruhu jsou uvedeny např. v [14], str. 52-53.

Archimédes je každému školákovi znám především jako fyzik. O mechanické metodě Archimédovy metody určování ploch pojednává práce [23] nebo o ní přednášel V. Zíka [24]. Zde nepoužijeme postupného vyplňování geometrického objektu stále menšími jednoduchými objekty známé míry (exhaustivní metoda), jen ukážeme obecný princip výpočtu ploch a objemů geometrických útvarů limitním přechodem.

Plocha kruhové podstavy válce je πr^2 , válec o výšce H můžeme rozložit na n nízkých válečků výšky $h = H/n$ s objemem $\Delta V = \pi r^2 h$. Objem celého válce je

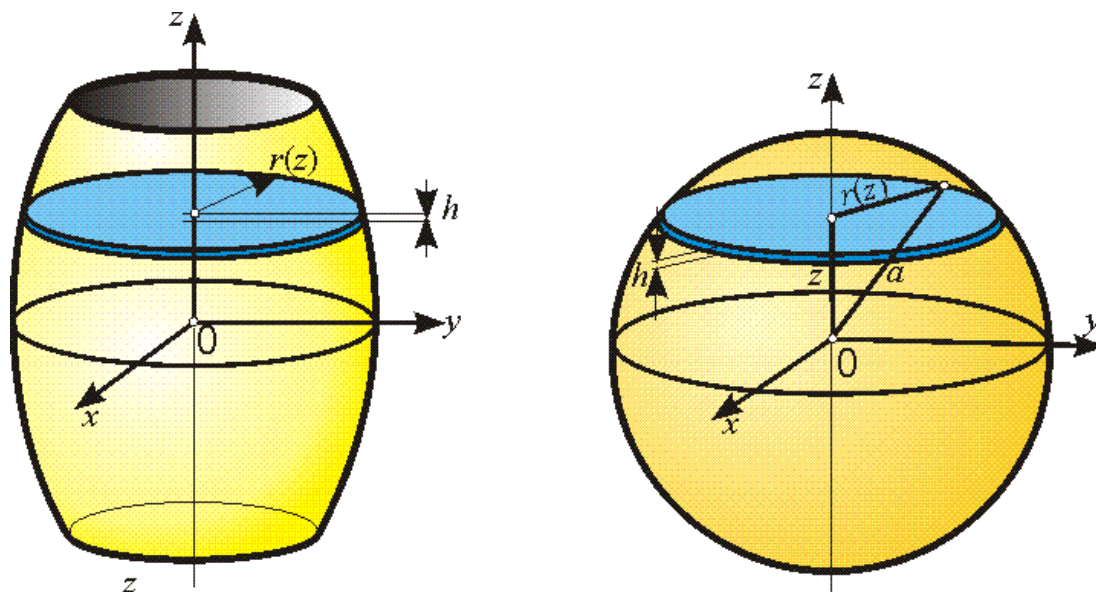
$$V = \sum_{k=1}^n \Delta V = n \Delta V = n \pi r^2 h = \pi r^2 H .$$

U rotačního tělesa s poloměrem závislým na výšce z nad podstavou, jako je sud nebo koule na obr. 1.8 získáme tímto způsobem odhad:

$$V(n) = \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \pi h \sum_{k=1}^n r^2(kh).$$

U koule o poloměru a je podle Pythagorovy věty $r^2(z) = a^2 - z^2$, tedy pro $z = kh$ je dolní odhad objemu koule (symetrie osy z vzhledem k počátku 0)

$$V(n) = 2 \pi h \sum_{k=1}^n (a^2 - k^2 h^2) = 2 \pi \frac{a}{n} (na^2 - \frac{a^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2) = 2 \pi a^3 (1 - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2).$$



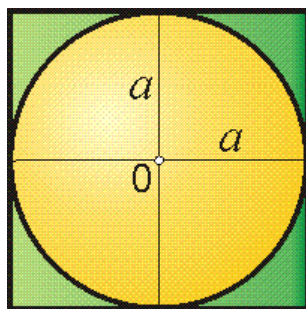
Obr. 1.8 – Dvě rotační tělesa.

Protože $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ (poznámka dále), je

$$V(n) = 2 \pi a^3 (1 - \frac{1}{n^3} \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)) = 2 \pi a^3 (1 - \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})).$$

Když nyní poroste n do nekonečna a tloušťka vrstviček h bude konvergovat k 0, bude

$$V = 2 \pi a^3 \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})) = 2 \pi a^3 (1 - \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})) = \frac{4}{3} \pi a^3.$$



Obr. 1.9 – Koule vepsaná do válce. Boční pohled.

Koule vepsaná do válce s poloměrem podstavy a výškou $H = 2a$ (obr. 1.9) má stejný poloměr a . Její objem $V_{koule} = \frac{4}{3}\pi a^3$, objem válce je $V_{válec} = \pi a^2 \times 2a$. Pak ovšem podíl objemů

$$\frac{V_{koule}}{V_{válec}} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{2\pi a^3} = \frac{2}{3}.$$

Tento výsledek uvedl Archimédes ve svém spisu O kouli a válci [25].

Snadno lze ukázat, že rovnostranný válec vepsaný do koule o poloměru a má objem

$$V_{válec, 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{válec} \text{ a střídavé vpisování koule a válce může pokračovat: } V_{válec, n} = 2^{-n/2} V_{válec}, \\ V_{koule, n} = 2^{-n/2} V_{koule}, n = 1, 2, \dots$$

•

Poznámka. Součty $S_m(n) = \sum_{k=1}^n k^m, m = 1, 2, 3, 4.$

- Součet $S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$ je známý součet aritmetické posloupnosti, ale můžeme jej určit také pomocí součtu čtverců.

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^2 = \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k + 1) = \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1.$$

Protože

$$2S_1(n) = 2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n (k+1)^2 - \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n 1 = (n+1)^2 - 1 - n = n^2 + n = n(n+1), \text{ je}$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

- Analogicky $S_2(n)$ odvodíme pomocí třetích mocnin.

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^3 = \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1; \text{ takže}$$

$$3S_2(n) = (n+1)^3 - 1 - 3S_1(n) - n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 3n(n+1)/2 - n.$$

Po vynásobení poslední rovnice číslem 2:

$$6S_2(n) = 2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n = n(2n^2 + 3n + 1) = n[n(2n+1) + 2n+1], \text{ tj.}$$

$$S_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

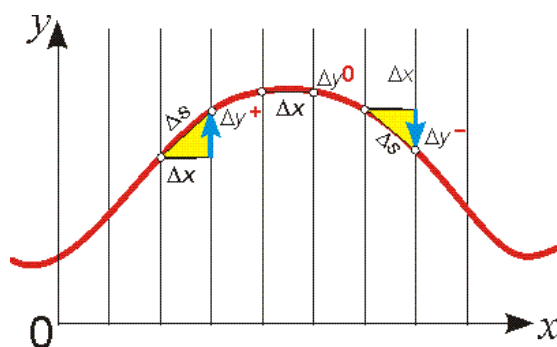
- Je zřejmé, že takto lze pokračovat. Např.

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = S_1^2(n), \quad S_4(n) = \frac{n}{30}[n^2(6n^2 + 15n + 10) - 1] \text{ atd.}$$

•

Výpočet objemů je součástí integrálního počtu, lidově řečeno scelovacího nebo sumačního počtu. S ním je úzce spojen diferenciální počet, jehož název je odvozen ze slova difference, rozdíl. A historie nás vede k již zmíněnému charakteristickému trojúhelníku u funkce jedné reálné proměnné. Příklad je na obr. 1.10.

Obr. 1.10 naznačuje, že tam, kde rozdíly Δy při rostoucím x mění spojitě znaménko z kladného do záporného, má funkce maximum. Na tuto vlastnost poukázal již Fermat. Bylo mu také zřejmé, že přírůstky nezávisle proměnné musí konvergovat k nule, aby se poloha extrému funkce dala určit přesně. Podobně uvažovali Pascal, Descartes, Huygens a další.



Obr. 1.10 – Velikost změn hladké funkce. V okolí extrému se charakteristický trojúhelník redukuje.

Ucelenější výklad limitního přechodu $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ vedl pojmu derivace funkce $y(x)$. Isaac Barrow, Newtonův učitel, strávil 4 roky cestami po Evropě a seznámil se s pracemi evropských a zejména francouzských matematiků. Převzal diferenciální (charakteristický) trojúhelník a odvodil vzorec pro výpočet délky oblouku rovinné křivky. Newton nazýval derivaci funkce y fluxí, značil ji tečkou, \dot{y} . Chápal ji spíše ve smyslu mechaniky, např. je-li y dráha, nezávisle proměnná t čas, je \dot{y} rychlost [12]. Toto značení pro derivaci podle času se ve fyzice používá dodnes.

Pro matematiku je však mnohem přirozenější a vhodnější značení Leibnizovo, kde se limita podílu $\Delta y/\Delta x$ označuje jako derivace funkce $y(x)$ podle x .

U jedné proměnné

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}(x),$$

u funkcí více proměnných je např. parciální derivace podle druhé proměnné x_2

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - y(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3)$$

apod. [14]. Přitom ∂ vyjadřuje, že jde o parciální (dílčí) změnu jen u jednoho argumentu funkce. Toto označení infinitesimální parciální změny zavedl Legendre kolem r. 1786.

Zobecnění derivace funkce jedné proměnné na funkce více proměnných je tedy snadné. Leibniz vycházel ze širší filosofické báze a snažil se zachytit logiku správného uvažování obecně. Parciální derivace v Newtonově symbolice neznám.

Mezi Newtonem a Leibnizem vznikl prioritní spor [5,12]. Dnes se má zato, že k operaci derivování a inverzní operaci integrace dospěli nezávisle [5]. Je-li $F(x)$ diferencovatelná funkce a f derivace F , platí základní formule integrálního počtu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Nazývá se Newtonova–Leibnizova formule (ale znal ji už Newtonův učitel Barrow [26]). Tato formule se dá zobecňovat v různých směrech [14].

1.6. Diferenciální rovnice, mechanika a další rozvoj matematiky

Proměnné, funkce a derivace mohou být svázány do relace, diferenciální rovnice. Např. zrychlení volného pádu tělesa v atmosféře závisí na výšce a odporu vzduchu, který je funkcí rychlosti tělesa, $R(\frac{dy}{dt})$. Pád z malé výšky $y_0 > 0$ a při bezvětří lze aproximovat jednodušším pohybem s konstantním gravitačním zrychlením $-g$ a lineárním odporem vzduchu $R(\frac{dy}{dt})/\frac{dy}{dt} = \text{const}$ (kvadratická závislost $R(\frac{dy}{dt}) = \frac{dy}{dt} (c_1 + c_2 \frac{dy}{dt})$ by samozřejmě byla realističtější [27], jak dosvědčí každý cyklista)

$$\frac{d^2}{dt^2} y + g + a \frac{d}{dt} y = 0 \quad (*)$$

s počátečními podmínkami $y(0) = y_0, \frac{dy}{dt}(0) = 0$.

Relace (*) je lineární diferenciální rovnice a její řešení se najde snadno. Přepíšeme ji do tvaru $\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt} y + ay) = -g$. Z něj dostaneme $\frac{d}{dt} y + ay = -gt + c$, kde $c = \text{const}$. Pro $t = 0$ z počátečních podmínek plyne $\frac{d}{dt} y(0) + a \times y(0) = -g \times 0 + c$, tj. $c = ay_0$. Řešení nové diferenciální rovnice

$$\frac{d}{dt} y + ay = -gt + ay_0$$

hledejme ve tvaru $y(t) = C(t) e^{-at}$. Po dosazení dostaneme

$$\frac{d}{dt} y(t) + a y(t) = \frac{dC}{dt} e^{-at} - aC e^{-at} + aC e^{-at} = -gt + ay_0, \text{ tj. } \frac{dC}{dt} = (-gt + ay_0) e^{at} \quad a$$

$$C(t) - C(0) = \int_0^t (-gt + ay_0) e^{at} dt = y_0 e^{at} - g \int_0^t t e^{at} dt = y_0(e^{at} - 1) - \frac{g}{a} [t e^{at} + \frac{1}{a}(1 - e^{at})]$$

Takže $y(t) = \{C(0) + y_0(e^{at} - 1) - \frac{g}{a} [t e^{at} + \frac{1}{a}(1 - e^{at})]\} e^{-at} = C(0) e^{-at} - \frac{g}{a} t + (y_0 + \frac{g}{a^2})(1 - e^{-at})$,

odkud pro $t = 0$ plyne: $y(0) = y_0 = C(0)$.

Rovnice (*) má pro $a \neq 0$ řešení

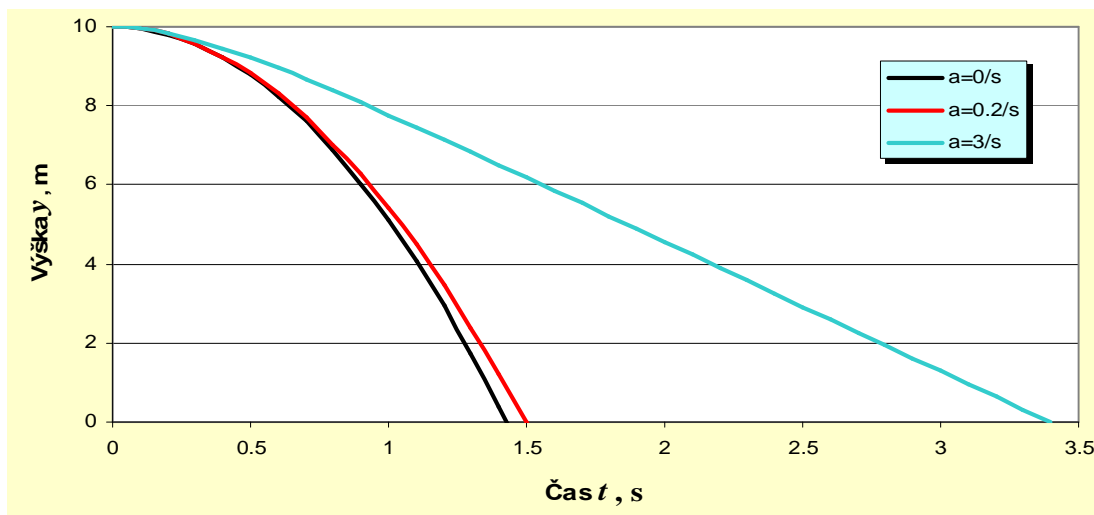
$$y(t) = y_0 - \frac{g}{a} t + \frac{g}{a^2} (1 - e^{-at}).$$

Po rozvinutí exponenciály v řadu

$$y(t) = y_0 - \frac{gt^2}{2} + ag \left(\frac{t^3}{3!} - \frac{at^4}{4!} + \frac{a^2 t^5}{5!} - \dots \right)$$

je ihned zřejmé, že pro $a = 0$ (nulový odpor) dostáváme elementární volný pád ve vakuu.

Obr. 1.11 ilustruje pád tělesa v gravitačním poli na povrchu Země ($g = 9.8\text{m/s}^2$) z výšky 10m při různém a , tedy s různým odporem prostředí. Funkce y pro nejhustší prostředí s $a = 3\text{s}^{-1}$ je prakticky lineární už pro $t > 1\text{s}$ (kámen ve vodě), u funkce y pro $a = 0.2\text{s}^{-1}$ by se linearita dosáhlo až po mnohem delším čase ($> 30\text{s}$, kámen ve vzduchu).



Obr. 1.11 – Pád v konstantním gravitačním poli s různým lineárním odporem prostředí.

Tento příklad naznačuje, jak přirozeně a snadno pojmy derivace a integrálu vedou k diferenciálním rovnicím a aplikacím v reálném světě. Před 3 stoletími to byly především fyzikální aplikace v mechanice, optice, astronomii.

V 17. století se už kromě knih začaly vydávat i periodické časopisy. Tím se podstatně zvýšila rychlost šíření nových poznatků i počet lidí zapojených do vývoje matematiky tehdy ještě neodmyslitelně propojené s fyzikou a astronomií.



Jean d'Alembert (1717–1783)

Např. ve Francii významně přispěl k obecné vzdělanosti *Jean le Rond d'Alembert* (1717–1783) [28], spolueditor (s Denisem Diderotem) vůbec prvního souboru tehdejších poznatků, známé francouzské *Encyclopédie*.

Jeho matka ho jako nemanželské novorozeně položila na schodiště kostela Saint Jean le Rond, a podle zvyku byl tedy pojmenován podle patrona kostela. Brzy jej adoptovala žena jednoho sklenáře. Jeho vlastní otec, šlechtic a důstojník, tajně platil pěstounům na jeho živobytí a vzdělání.

D'Alembert formuloval jako první základní větu algebry dokázanou později C. F. Gausssem [16]: každý polynom s komplexními koeficienty má v komplexní rovině aspoň jeden kořen. V teorii číselných řad se uvádí d'Alembertovo podílové kritérium absolutní konvergence řady [14]:

jestliže $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < q < 1$, řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.

D'Alembert podstatně přispěl ke zpřesnění pojmu limity. Z mechaniky známe d'Alembertův princip [27,29,30], z mechaniky kontinua [30,32], matematické fyziky [33,34] i matematiky [14] d'Alembertovo řešení vlnové rovnice, popř. v jedné dimenzi rovnice kmitů struny,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kde x je délková souřadnice struny, t je čas a $u(x, t)$ je výchylka bodu struny kolmo na osu struny v klidu. Snadno se ověří, že pro libovolné dostatečně hladké funkce f, g je $u(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt)$ obecné řešení rovnice struny. Názorný výklad s animacemi lze najít na internetu [34,35].

Zatímco v Anglii nevhodná symbolika Newtonova a jeho kult rozvoj matematiky brzdily, symbolika Leibnizova a nadnárodní pojetí vědy na kontinentě vedly k rychlému rozvoji nových metod. Kolem r. 1700 a později se na něm značně podílel rod Bernoulliů ve více generacích ze švýcarské Basileje (Basel). To je historicky velmi unikátní fenomén [5,37]. Z rodu Bernoulliů uvádíme jen dvě generace:

- Jakob Bernoulli (1654–1705) —→ Bernoulliho čísla, dif. rovnice, binomické rozdělení,
- Johann Bernoulli (1667–1748) – mladší bratr Jakoba —→ kmity struny,
.....
- Nicolaus I Bernoulli (1687–1759),
- Nicolaus II Bernoulli (1695–1726),
- Daniel Bernoulli (1700–1782) —→ Bernoulliho rovnice, princip a petrohradský paradox,
- Johann II Bernoulli (1710–1790),
- Johann III Bernoulli (1744–1807).

Jejich předek, Leon Bernoulli, pocházel z Antverp a z náboženských důvodů v 16. století emigroval do Basileje před španělskou nadvládou.

Některé pojmy spojené se jménem Bernoulli:

1. Bernoulliho diferenciální rovnice (Jakob Bernoulli, 1695): $y' + P(x)y = Q(x)y^n$
(dělením y^n a substitucí $u = y^{1-n}$ se linearizuje)
2. Bernoulliho (alternativní) distribuce pravděpodobnosti (Jakob Bernoulli) [37]

$$f(k, p) = \begin{cases} p & \text{pro } k = 1 \\ (1-p) & \text{pro } k = 0 \end{cases} .$$

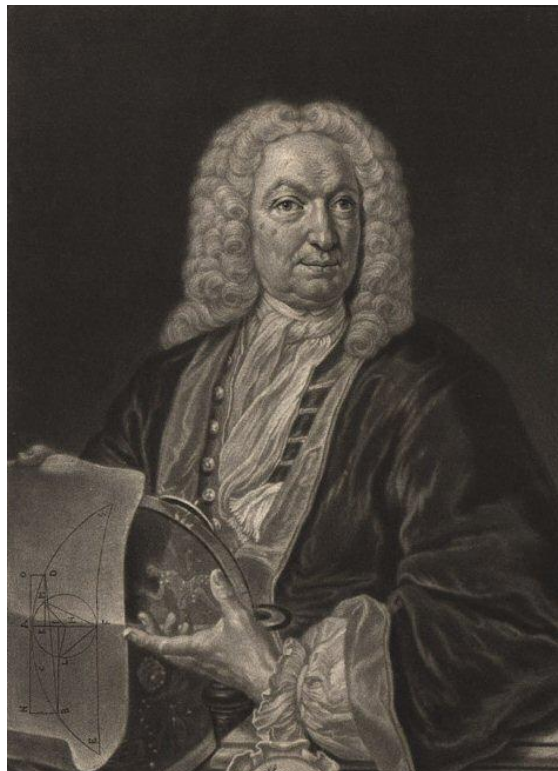


Sloupy vody zvednuté podtlakem za proudovými motory letadla letícího nízko nad hladinou [38].

3. Bernoulliho princip (Daniel Bernoulli, *Hydrodynamica*, 1738) u nestlačitelných (ale i stlačitelných) tekutin: rychlost tekutiny se zvyšuje, klesá-li potenciální energie (tlak). To krásně demonstruje vztlak u křídel ptáků a letadel nebo předchozí efektní obrázek převzatý z [38].



Jakob Bernoulli (1654–1705).



Johann Bernoulli (1667–1748), Eulerův učitel.



2. LEONHARD EULER – ŽIVOTNÍ DRÁHA [39]

Leonhard Euler se narodil 15. dubna 1707 v Basileji (Basel) ve Švýcarsku. Jeho otec, Paul Euler, vystudoval teologii na basilejské universitě a navštěvoval také matematické přednášky Jakoba Bernoulliho. Paul Euler a Johann Bernoulli jako studenti dokonce žili v domě Jakoba Bernoulliho. Později se Paul Euler stal protestantským pastorem a oženil se s Margaretou Bruckerovou, rovněž dcerou pastora. Jejich syn, Leonhard, se narodil v Basileji, ale když měl asi rok, rodina se přestěhovala do Riehenu nedaleko. Paul Euler měl jakési matematické vzdělání a mohl tedy sám vzdělávat svého syna i v elementární matematice.



Leonhard začal chodit do školy v Basileji a během školní docházky bydlel u své babičky z matčiny strany. Škola, do které Leonhard chodil, byla nevalná a v ní se Euler o matematice mnoho nedověděl. Avšak otcův výklad vzbudil jeho zájem o matematiku, takže sám začal číst matematické texty a hledat cesty k dalšímu vzdělání. Paul Euler si přál, aby se jeho syn stal také pastorem. Proto 14letý Leonhard Euler začal studovat na universitě v Basileji. Měl nejprve získat všeobecné vzdělání a pak nastoupit na teologickou fakultu. Otcův přítel, Johann Bernoulli, při soukromých lekcích brzy zjistil, že Euler má obrovské matematické nadání. Euler to sám popsal takto [39]:

“...Brzy jsem našel příležitost být představen slavnému profesoru Johannu Bernoulliovi ... Pravda, měl málo času a tak hned odmítl dávat mi soukromé hodiny. Ale dal mi mnohem cennější radu, abych začal sám studovat obtížnější matematické knihy a to tak pilně, jak to jen půjde. A kdybych narazil na nějakou obtíž nebo překážku, že za ním mohu každé nedělní odpoledne přijít, a on mi vysvětlí všechno, co jsem nepochopil...”

V roce 1723 Euler dokončil magisterské studium ve filosofii prací, v níž srovnává a staví proti sobě filosofické ideje Newtonovy a Descartesovy. Na podzim 1723 podle přání svého otce začal studium na teologické fakultě. Ale přesto, že po celý život byl oddaným křesťanem, nepociťoval pro teologická studia, studium řečtiny a hebrejštiny takové nadšení, jaké v něm vzbuzovala matematika. Po přímluvách Johanna Bernoulliho otec nakonec souhlasil, aby se Leonhard zaměřil na matematiku. Jistě v tom sehrálo svou roli přátelství otce s Johannem Bernoullim.

Euler ukončil své studium na universitě v Basileji v roce 1726. Během svého studia a na doporučení Johanna Bernoulliho prostudoval mnoho matematických prací. V roce 1726 už byla otištěna jeho první krátká práce o izochronách v klidném prostředí (spojnic míst současného výskytu nějakého jevu nebo hodnoty). V dalším roce, 1727, tedy ve 20, publikoval práci o reciprokových trajektoriích a do soutěže o Velkou cenu pařížské akademie zaslal práci o nejlepší umístění stožárů na plachetnici.

Velkou cenu 1727 získal Bouguer, expert na výpočty lodí. Euler získal druhé místo, což byl pro tak mladého adepta krásný výsledek. Teď ale Euler musel shánět nějaké akademické zaměstnání. A když v červenci 1726 zemřel v Petrohradě Nicolaus (II) Bernoulli a jeho místo se uvolnilo, bylo Eulerovi nabídnuto, aby tam vyučoval aplikace matematiky a mechaniky ve fyziologii. Euler to místo přijal v listopadu, ale s výhradou, že do Ruska pojede až na jaře příštího roku. Pro toto oddálení měl své důvody. Jednak potřeboval čas, aby nastudoval problematiku spojenou s novým místem, jednak měl naději, že na universitě v Basileji získá místo po nedávno zemřelém profesoru fyziky. Euler tehdy napsal článek o akustice, který se stal klasickým, a předložil jej na podporu své žádosti. O obsazení místa však rozhodl los a v Eulerův neprospěch mluvil také nízký věk – teprve 19 let. Ale Calinger píše [40]:

Toto rozhodnutí přineslo nakonec Eulerovi prospěch, protože jej donutilo, aby odešel z malé země a dostal se na postavení mnohem adekvátnější pro jeho skvělou výzkumnou a technologickou práci.

Jakmile se Euler dověděl, že katedru fyziky nezíská, odjel z Basileje. Nejprve jel lodí po Rýnu, pak projel Německo v poštovním voze do Lübecku a odtud přijel lodí do Petrohradu 17. května 1727. Do Petrohradské akademie nastoupil dva roky po jejím založení Kateřinou I., ženou Petra Velikého (1672–1725). Na žádost Daniela Bernoulliho a Jakoba Hermanna byl přidělen do matematicko–fyzikální sekce akademie místo původně nabídnutého oboru fyziologie. V Petrohradě měl Euler mnoho kolegů, kteří pro něj vytvářeli výjimečně příznivé badatelské prostředí.

Nikde jinde by nebyl obklopen takovou skupinou eminentních vědců, jako byl v oblasti analýzy a geometrie jeho příbuzný Jakob Hermann nebo Daniel Bernoulli, s nímž Euler kromě přátelství pojil společný zájem na aplikacích matematiky, dále mnohostranný učenec Christian Goldbach, s nímž Euler diskutoval o mnoha problémech analýzy, teorie čísel a dalších.

Euler byl formálně sanitární poručík v ruském námořnictvu 1727–1730. Nejprve



Daniel Bernoulli (1700–1782)

bydlel u Daniela Bernoulliho. Ten začal být v Rusku nešťastný a předtím poprosil Eulera, aby mu ze Švýcarska přivezl čaj, kávu, brandy a nějaké delikatesy. Euler se 1730 stal profesorem fyziky na Akademii a protože mu to skýtalo možnost stát se řádným členem Akademie, mohl se vzdát místa v ruském námořnictvu.

Daniel Bernoulli vedl v Akademii sekci matematiky. A když 1733 z Petrohradu odjel zpět do Basileje, byl to Euler, komu bylo toto významné postavení přiděleno. Zlepšení platu, které z toho plynulo, umožnilo Eulerovi, aby se oženil.

Jeho ženou se 7. ledna 1734 stala Katharina Gsell, dcera malíře z gymnázia v Petrohradě. Katharina byla stejně jako Euler ze švýcarské rodiny. Měli celkem 13 dětí, z nichž se dospělosti dožilo jen 5. Euler říkával, že některé ze svých nejvýznamnějších objevů udělal, když choval některé z dětí, zatímco ostatní si hrály kolem nich.

K Eulerovým matematickým úspěchům se dostaneme později, ale již zde se zdá být vhodné shrnout jeho výsledky v tomto období jeho života:

... po roce 1730 pracoval na státních projektech týkajících se kartografie, výuky vědy, magnetismu, tepelného pohonu motorů, stavby strojů a lodí... Nyní se začalo uskutečňovat jádro jeho výzkumného programu s cílem vytvořit: teorii čísel, analýzu infinitesimálních veličin včetně vznikajících odvětví, nauku o diferenciálních rovnicích a variačním počtu, a také racionální mechaniku. Viděl tyto oblasti jako vnitřně úzce propojené. Teorie čísel byla životně důležitá pro základy analýzy. Speciální funkce a diferenciální rovnice byly potřebné pro racionální mechaniku, z níž pocházely konkrétní problémy a motivace.

Publikace mnoha článků a knihy *Mechanica* (1736–1737), která obšírně vykládá Newtonovu dynamiku poprvé prostředky matematické analýzy, započaly Eulerovu cestu k větším matematickým dílům.

Eulerovy zdravotní problémy začaly v roce 1735, kdy dostal vysokou horečku a hrozila mu smrt. Nedal však o tom vědět ani svým rodičům ani členům rodiny Bernoulliů v Basileji, dokud se neuzdravil. Euler říkal, že jeho problémy s očima začaly 1738, kdy byl vyčerpán po dlouhé kartografické práci, a že do roku 1740

...ztratil jedno oko a druhé bylo ve stejném nebezpečí.

Ale Calinger [40] si myslí, že Eulerovy problémy s očima jistě začaly už dříve a pochybuje, že by vysoká horečka 1735 mohla být symptomem přílišného namáhání zraku. Dále konstatuje, že na Eulerově portrétu z roku 1753 to vypadá, že levým okem stále viděl dobře. Postiženo bylo pravé oko, i když ani na ně nebyl ještě úplně slepý.



L. Euler (portrét od Emanuela Handmanna 1753)

Myslí si, že Euler oslepl na levé oko patrně v důsledku šedého zákalu, nikoli z přílišného namáhání zraku.

Do roku 1740, tedy již ve 33 letech, měl Euler vysokou reputaci. Získal Velkou cenu pařížské akademie za roky 1738 a 1740. V obou případech se podílel na první ceně ještě s někým dalším. Skvělá pověst mu přinesla pozvání do Berlína, ale Euler zprvu dával přednost pobytu v Petrohradě. Pozdější politické turbulence však značně ztížily pobyt cizinců v Rusku a přispěly k tomu, že Euler změnil své mínění. Když potom dostal další pozvání s lepší nabídkou přímo od krále Friedricha Velkého, odjel do Berlína. Tam místo Společnosti věd měla být zřízena Akademie věd. Z Petrohradu odjel 19. června

1741 a do Berlína dorazil 25. července. V dopise jednomu příteli napsal:

Mohu si dělat, co chci (v mém výzkumu)... Král mě nazývá svým profesorem a já si myslím, že jsem tím nejšťastnějším člověkem na světě.

Dokonce, i když byl Euler v Berlíně, byla mu stále vyplácena část jeho platu z Ruska. Za tyto peníze kupoval knihy a přístroje pro Petrohradskou akademii, pokračoval v psaní vědeckých zpráv pro ni a školil mladé ruské adepty vědy.

Prvním prezidentem berlínské akademie byl po jejím založení v roce 1744 Pierre Louis Maupertuis (1698–1759). (Maupertuis byl žákem Johanna Bernoulliho. Vedl expedice do Peru a na sever skandinávského poloostrova, které měřením délky 1° meridiánu ověřily zploštění na pólech způsobené odstředivým zrychlením při rotaci Země. Jako první publikoval princip nejmenší akce v mechanice [27,29], uvažoval o dědičnosti atd. Bohužel mezi jeho charakteristiky patří i to, že geniální nápady zůstaly ve stadiu rozpracování, nedotaženy do konce [41]).

Euler se stal ředitelem matematické sekce a zastupoval Maupertuise v době jeho nepřítomnosti. Oba se stali velkými přáteli, což dokládá jejich dochovaná bohatá korespondence [42,43]. Euler v Berlíně odvedl nesmírný kus práce.

...dohlížel na astronomickou observatoř a na botanické zahrady; vybíral personál; dohlížel na různé finanční záležitosti; a speciálně řídil publikování různých kalendářů a geografických map, jejichž prodej byl zdrojem příjmů akademie. Král ukládal Eulerovi praktické úkoly, jako byl r. 1749 projekt korekce výšky hladiny v kanále Finow (mezi Odrou a Havelou)... V té době také dohlížel na práci čerpadel a pump hydraulického systému v Sans Souci – královské letní rezidenci.

Tím však v žádném případě výčet jeho povinností nekončí. Byl členem výboru akademie, který měl na starosti knihovnu a vědecké publikace. Měl dohlížet na vládní

loterie, pojišťovnictví, annuity (splácení půjček s úrokem), penze a dělostřelectvo. Kromě toho všeho jeho vědecký přínos v této době byl fenomenální.

Během 25 let, které strávil v Berlíně, Euler napsal asi 380 článků. Kromě toho napsal knihy o variačním počtu, o výpočtech drah planet, o dělostřelectví a balistice (přeložil a obsáhlým dodatkem doplnil knihu o balistice Benjamina Robinsona (1707–1751) [44]), o matematické analýze, o stavbě lodí a navigaci, o pohybu Měsíce, o diferenciálním počtu. Napsal také vědeckopopulární Dopisy německé princezně, 1768–1772, které vyšly ve třech svazcích).

V roce 1759 zemřel Maupertuis a Euler, bez oficiálního titulu presidenta, převzal vedení berlínské akademie. Dřívější přátelství a dobré vztahy vystřídala však nepřízeň krále Friedricha a díky ní předsedou akademie jmenován nebyl. Euler, který nesouhlasil s d'Alembertem v některých vědeckých otázkách, se velmi dotklo, když 1763 bylo místo presidenta akademie nabídnuto d'Alembertovi. I potom, co d'Alembert se odmítl přestěhovat do Berlína, Friedrich nepřestal zasahovat do chodu akademie. To Euler donutilo k odchodu.

V roce 1766 se Euler vrátil do Petrohradu a Friedrich byl při loučení s ním velmi rozeznen. Brzy po návratu do Ruska Euler onemocněl a téměř úplně oslepl. Jeho dům navíc vyhořel (1771). Podařilo se mu zachránit jen vlastní život a matematické rukopisy. V tomtéž roce mu operovali šedý zákal a zrak se mu na krátkou dobu vrátil. Ale zdá se, že Euler zanedbal nutnou ochranu a šetření zraku, takže oslepl definitivně. Díky fenomenální paměti byl však i potom schopen pokračovat ve vědecké práci. Zabýval se optikou, algebrou, pohybem Měsíce. Je úžasné, že po svém návratu do Petrohradu (ve věku 59 let) navzdory úplné ztrátě zraku napsal téměř polovinu z celkového počtu svých vědeckých prací.

Euler by samozřejmě nemohl vyprodukovat tolik prací bez cizí pomoci. Diktoval svým synům Johannu Albrechtu Eulerovi, který pracoval ve fyzikální sekci Peterburské akademie od 1766 a v roce 1769 se stal jejím sekretářem, a Christophu Eulerovi, který sloužil v armádě. Eulerovi dále pomáhali dva členové akademie, W. L. Krafft a A. J. Lexell, a rovněž mladý matematik Nicolas von Fuss, který byl pozván do akademie v roce 1772. Fuss se stal Eulerovým zetěm a 1776 jeho asistentem.

...vědci, kteří pomáhali Eulerovi, nebyli jen zapisovatelé; on s nimi diskutoval o obecné struktuře díla a oni rozvíjeli jeho nápady, počítali tabulky a někdy sestavovali příklady.

Euler např. děkuje Albrechtovi, Krafftovi a Lexellovi za jejich pomoc při psaní knihy o pohybu Měsíce (775 stran) vydané v roce 1772. Fuss v časovém rozpětí asi 7 let, během nichž byl Eulerovým asistentem, pomáhal Eulerovi s přípravou 250 článků a také knihy o pojišťovnictví, která vyšla 1776. Napsal také oslavnou řeč na Euleru [45].

18. září 1783 Euler prožil dopoledne jako obvykle. Učil matematiku jedno ze svých vnoučat, křídou na dvou tabulích udělal nějaké výpočty o pohybu balonů, pak debatoval s Lexellem a Fussem o tehdy nově objevené planetě Uran. Kolem

páté odpoledne mu praskla céva v mozku. Než ztratil vědomí, stačil jen povzdechnout: “umírám“. Večer kolem 11. hodiny skonal.

Po Eulerově smrti Petrohradská akademie začala vydávat Eulerovy nepublikované písemnosti a pokračovala v tom dalších 50 let.



L. Euler

Eulerovo matematické dílo je tak obrovské, že se nedá v obvyklém rozpětí článku popsat. Euler byl asi nejplodnějším matematikem všech dob. Napsal kolem 880 článků, desítky knih, tisíce vědeckých sdělení ve formě dopisů.

Posunul hranice analytické geometrie a trigonometrie, kde jako první uvažoval o sinu, kosinu atd. jako o funkcích, ne jako o sečnách jako Ptolemaios.

Zásadním a novým způsobem přeformuloval geometrii, infinitesimální počet a teorii čísel. Sloučil Leibnizův diferenciální počet a Newtonovu metodu fluxí do matematické analýzy. Zavedl beta a gama funkce a integrující faktor u diferenciálních rovnic. Spolu s Clairautem se zabýval teorií Měsíce, studoval mechaniku kontinua, problém tří těles, teorii elasticity, akustiku, vlnovou teorii světla, hydrauliku, hudbu. Položil základy

analytické mechaniky, speciálně v knize *Teorie pohybu tuhých těles* (1765).

Eulerovi vděčíme za označení funkce ve tvaru $f(x)$ (1734), zavedení symbolu e pro základ přirozeného logaritmu (1727), $i = \sqrt{-1}$ pro imaginární jednotku (1777), π pro podíl obvodu a průměru kruhu, za značení konečných diferencí Δy , $\Delta^2 y$, ..., Σ pro sčítání atd.

Eulerovo souhrnné dílo představuje asi 70 svazků (v angličtině). Všichni vědci, např. takoví velikáni jako P. S. Laplace nebo C. F. Gauss, si Eulera velmi vážili a jeho dílo bylo inspirací pro celé generace matematiků. To jen ukazuje, jak obrovský byl Eulerův vliv.



3. EULEROVY MATEMATICKÉ PRÁCE

3.1. TEORIE ČÍSEL

- *Vyvrácení Fermatovy hypotézy o prvočíselnosti $2^{2^k} + 1$ (1732)*

Fermat vyslovil domněnku, že všechna čísla tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ jsou prvočísla. Když Goldbach s touto hypotézou seznámil Eulera, ten ji prověřil pro $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Ale už $F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$. To je Eulerův výsledek z roku 1732 (25 let), který Fermatovu domněnku vyvrátil [16,46]. Euler také dokázal, že každý dělitel složeného Fermatova čísla má tvar $n \times 2^m + 1$ [47]. Např. u $k = 5$ máme dělitele $641 = 5 \times 2^9 + 1$ a $6\,700\,417 = 52\,347 \times 2^7 + 1$.

Poznámka. Zřejmě jsem [47] dobře nepochopil, protože rozklad na prvočinitele tvaru $n \times 2^m + 1$ je triviální. Složené Fermatovo číslo je liché, musí tedy být součinem lichých čísel, z nichž každé dá po odečtení 1 číslo dělitelné 2.

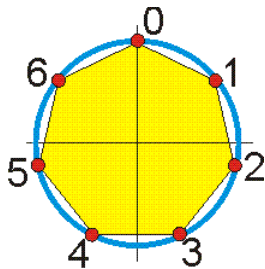
Dosud dokonce žádné větší Fermatovo prvočíselo než $2^{16} + 1 = 65\,537$ neznáme, ale je nutno zároveň říci, že v ověřování dělitelnosti F_k se nepodařilo dojít ani ke $k = 12$ [16,46].

Dnes je rozklad $2^{32} + 1$ na počítači nebo i na kalkulačce snadný úkol, který jasně ukazuje, jak se zmenšila mezera mezi dřívější vrcholnou vědou a dnešní běžnou rutinou. Obecně to však ani zdaleka neplatí.

- *Modulární aritmetika, kvadratická reciprocita.*

Se zbytkovými třídami se pochopitelně dají provádět běžné aritmetické operace, řešit rovnice apod. Např. je-li $x \equiv 2 \pmod{7}$ a $y \equiv 3 \pmod{7}$, je $x + y \equiv 5 \pmod{7}$, neboť pak

$x = 2 + m \times 7$, $y = 3 + n \times 7$ a $x + y = 5 + (m + n) \times 7$. Pro $x \equiv 6 \pmod{7}$ a $y \equiv 5 \pmod{7}$, je $x + y \equiv 11 \pmod{7} \equiv 4 \pmod{7}$, jako bychom obcházeli kruh s vyznačenými 7 pozicemi (obr. 3.1).



Je přirozené např. se ptát: jaké x splňuje rovnici

$$2x + 5 \equiv 3 \pmod{7} ?$$

Obr. 3.1 – Modulární hodiny. Jde tedy o celočíselné řešení rovnice $2x \equiv (3 - 5) \pmod{7}$, tj. $x \equiv -1 \pmod{7} \equiv 6 \pmod{7}$. Na obr. 3.1 se dá snadno ověřit, že vyjdeme-li z bodu 0 a uděláme $2 \times 6 = 12$ kroků ve směru hodinových ručiček, dostaneme se do bodu 5. Přidáme-li dalších 5 kroků, dostaneme se skutečně do bodu 3.

V tomto duchu lze pokračovat a definovat kongruenci řádu n s polynomem P stupně n a koeficientem u x^n nesoudělným s modulem p ,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Důležitá je kvadratická kongruence zavedená rovnicí $x^2 \equiv m \pmod{p}$, kde m je celé a p je prvočíselo. Zřejmě $x = \pm \sqrt{m + np}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Pro q, p celá definujme Legendreův symbol

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } x^2 \equiv q \pmod{p} \text{ má řešení,} \\ -1 & \text{jestliže } x^2 \equiv q \pmod{p} \text{ nemá řešení,} \\ 0 & \text{q je násobkem p.} \end{cases}$$

Zákon kvadratické reciprocity. Pro libovolná prvočísla $p, q > 2$ platí

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Pro ilustraci: pro $p = 3, q = 13$ je $\left(\frac{p}{q}\right) = 1, \left(\frac{q}{p}\right) = 1, \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{2 \times 3} = 1,$

pro $p = 5, q = 7$ je $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -1, \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = 1 = (-1)^{4 \times 6/4},$

pro $p = 11, q = 7$ je $\left(\frac{11}{7}\right) = 1, \left(\frac{7}{11}\right) = 1, \left(\frac{11}{7}\right)\left(\frac{7}{11}\right) = 1 = (-1)^{6 \times 10/4}.$

Zákon kvadratické reciprocity vyslovil Euler – v jiné formě a bez důkazu. Gauss jej poprvé dokázal 1796, pak publikoval dalších 5 důkazů a v jeho pozůstalosti se našly ještě 2 další [49]. Zákon kvadratické reciprocity Gauss nazýval ‘zlatou větou’ teorie čísel. Používal však jinou symboliku a o reciprocitě nemluvil.

Euler podal (1749) důkaz této další Fermatovy hypotézy:

Jsou-li a, b přirozená nesoudělná čísla, není $a^2 + b^2$ dělitelné žádným číslem $4n-1$.

■ *Eulerova funkce φ (totient function), Eulerova věta (1760)*

Přirozená m, n jsou soudělná, mají-li společného dělitele > 1 . Pro m přirozené, $m > 1$, značí $\varphi(m) - 1$ počet přirozených čísel k mezi 1 a m , která jsou nesoudělná s m (tj. $\varphi(m) = 1 + \text{card}\{k: 1 < k < m, k \text{ nesoudělné s } m\}$, kde $\text{card } M$ značí mohutnost množiny M , zde tedy počet prvků M [14]). U prvočísla p je $\varphi(p) = p - 1$, ale u složených čísel může být $\varphi(m)$ podstatně menší než $m - 1$; Například $\varphi(12) = 1 + \text{card}\{5, 7, 11\} = 4$. O vlastnostech a výpočtech Eulerovy funkce se lze dovědět víc např. z odkazu [48]. V následující tabulce je prvních 21 hodnot $\varphi(m)$. Pro úplnost se definuje $\varphi(1) = 1$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\varphi(m)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8	12

Malou Fermatovu větu (str. 9) pro prvočísla $m = p$ lze psát ve tvaru $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Euler tuto větu zobecnil:

Eulerova nebo zobecněná Fermatova nebo Fermatova–Eulerova věta:

Pro přirozená nesoudělná čísla m a n je $n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Důkaz podobný důkazu malé Fermatovy věty je např. v [9], str. 114. Dnes se obvykle používá teorie grup [11].

Příklady. $10^{\varphi(7)} = 10^6 = 142\,857 \times 7 + 1 \equiv 1 \pmod{7},$
 $21^{\varphi(10)} = 21^4 = 194\,481 \equiv 1 \pmod{10}$
 $10^{\varphi(21)} = 10^{12} = 47619047619 \times 21 + 1 = 1 \pmod{21}.$

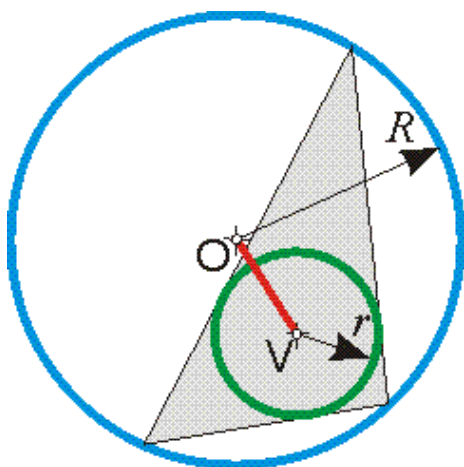
V teorii čísel existuje spousta zajímavých tvrzení a hypotéz. Např.

- *Wilsonova věta* říká: je-li p prvočíslo, je $(p - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.
- *Goldbachova hypotéza*: existuje nekonečně mnoho prvočíselných dvojčat, tj. dvojic prvočísel, jejichž rozdíl je roven 2.
Např. (3, 5), (5, 7), (11, 13), ... (107, 109), ... (4049, 4051), ...
Říká se, že Golbachova hypotéza pravděpodobně platí, ale zůstává bez důkazu [50].
Lze však najít i její důkazy [51]. Zda jsou správné, nevím.
- *Bertrandova domněnka*, dokázaná P. L. Čebyševem 1850: pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ existuje aspoň jedno prvočíslo p takové, že $n < p < 2n$ [52]. To je další důkaz, že prvočísel je nekonečně mnoho.
- Další *Goldbachovy hypotézy*: Každé přirozené číslo > 5 lze vyjádřit jako součet 3 prvočísel. Každé celé sudé číslo > 2 je součtem 2 prvočísel (1742) [53].
- *Eulerova–Lagrangeova věta*: každé přirozené číslo je součtem 4 čtverců celých čísel.

Soustavnější výklad teorie čísel lze najít v [54], česky např. v [55] a další literatuře, a na webu [Seznam|hledat: teorie čísel](#).

Poznámka. Někteří fyzici, inženýři a další uživatelé matematiky si myslí, že teorie čísel je samoučelná teorie pro teorii, bez praktického užítku (tak se snad vyslovil L. D. Landau nebo R. Feynman, teď nevím). Teorie čísel se ale prakticky používá v kryptologii, vytváření tajných kódů a hesel. Začátkem minulého století se podobně pochybovalo o užitečnosti teorie grup. Dnes našla bohaté aplikace ve fyzice.

3.2 GEOMETRIE



Obr. 3.2 – Trojúhelník,
kružnice vepsaná a opsaná.

Eulerovo jméno se pojí s tímto tvrzením: vzdálenost středu O kružnice opsané a středu V kružnice vepsané témuž trojúhelníku je

$$d = OV = \sqrt{R(R - 2r)}.$$

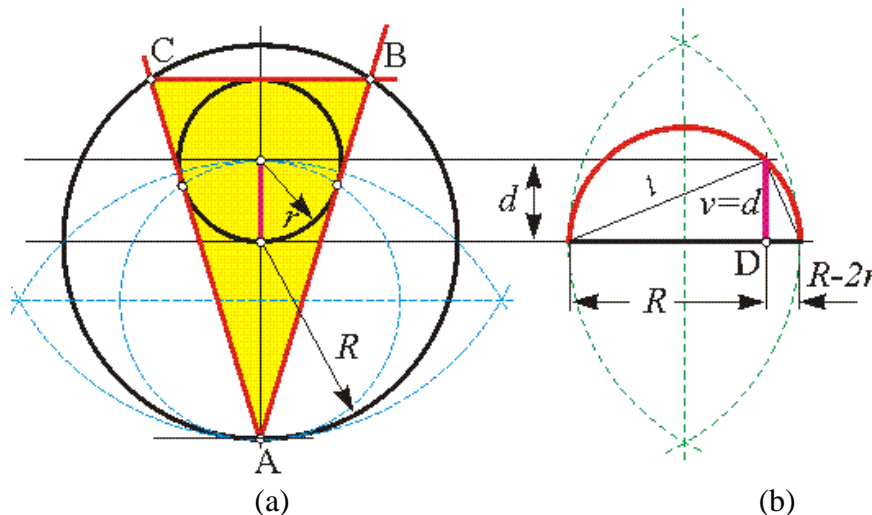
Komentář (obr. 3.2). Veličinám R , r , d vyhovuje nekonečný počet trojúhelníků. Konstrukci jednoho ukazuje obr. 3.3a. Středů kružnice opsané a vepsané umístíme na svislou osu ve vzdálenosti d . Za vrchol A zvolíme jeden z průsečíků kružnice o poloměru R s touto osou. Strany Δ vycházející z vrcholu A jsou úsečky na tečnách vedených z vrcholu A k vnitřní kružnici

s poloměrem r . Konstrukce tečen je zřejmá (přerušované čáry na obr. 2.3a). Tečny protnou opsanou kružnici v dalších vrcholech B a C trojúhelníka.

Ověření rovnosti $d = \sqrt{R(R-2r)}$ se opírá o Euklidovu větu o výšce. Sestrojíme úsečku o délce $2(R-r)$, vyznačíme na ní úseky dlouhé R a $(R-2r)$ (bod D), rozpůlíme ji a ze středu opíšeme oblouk o poloměru $R-r$. Podle Euklidovy věty o výšce je $v = \sqrt{R(R-2r)} = d$.

Ještě jinak. Podle další Euklidovy věty (o odvěsně) platí, že čtverec delší odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku nad průměrem je $l^2 = [2(R-r)] \times R = 2R^2 - 2Rr$. Použijeme-li Pythagorovy věty, dostaneme stejný výsledek: $l^2 = R^2 + d^2 = 2R^2 - 2Rr$.

Bod A lze ovšem umístit na opsané velké kružnici (s poloměrem R) kamkoli a tak se zachováním dotyku stran s vnitřní kružnicí posunout vrcholy B, C. Pak trojúhelník při stejných veličinách d , R , r sice přestane být rovnoramenný, ale ztráta symetrie se netýká ani konstrukce na obr. 3.3b ani s ní spojených úvah.



Obr. 3.3 – Konstrukce rovnoramenného trojúhelníka z prvků R , r , d .

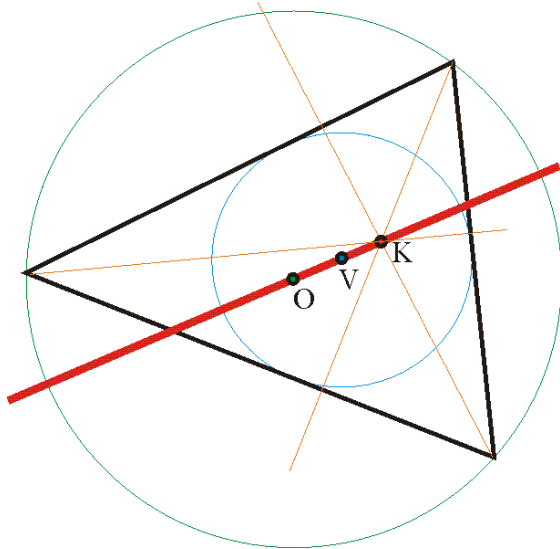
Aby d bylo reálné číslo, $d \geq 0$, musí být

$$R \geq 2r.$$

Této nerovnosti se někdy říká *Eulerova nerovnost*.

Slovy: *průměr vepsané kružnice je menší nebo nejvýš roven poloměru opsané kružnice*. V mezním případě rovnostranného trojúhelníka je střed kružnice vepsané také středem kružnice opsané, $d = 0$, těžiště ve $2/3$ spojnice od vrcholu a tato vzdálenost je rovna poloměru R kružnice opsané. Vzdálenost těžiště ke straně, tedy poloměr r kružnice vepsané, je zbývající $1/3$ této spojnice. Je tedy $R = 2r$ a $d = 0$.

Z elementární geometrie uvedeme ještě další *Eulerovu větu*. U každého trojúhelníka leží střed O kružnice opsané, průsečík K všech kolmic spuštěných z vrcholů na protilehlé strany a střed V kružnice vepsané na jedné přímce, *Eulerově přímce* (obr. 3.4). U rovnostranného trojúhelníka přímka degeneruje do jednoho bodu. Více je uvedeno např. v [56,57].



Obr. 3.4 – Eulerova přímka trojúhelníka.

O --- střed opsané kružnice,

V --- střed vepsané kružnice,

K --- průsečík kolmic z vrcholů.

Poznámka. O trojúhelnících existuje spousta vět. Např. mladý *Napoleon Bonaparte* ve vězení objevil, že těžiště rovnostranných trojúhelníků nad stranami libovolného trojúhelníka tvoří rovnostranný trojúhelník (tzv. srdce trojúhelníka; viz <http://www.jimloy.com/geometry/napoleon.htm>).

Topologické invarianty mnohostěnů

Množina M , na níž jsou definovány lineární operace, tj. součet prvků a násobení skalárem (číslem) je *konvexní*, jestliže pro libovolné její dva prvky leží celá spojnice těchto prvků v M . Podrobněji: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M, t \in [0, 1] \Rightarrow t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in M$.

Eulerova věta o konvexních mnohostěnech: počet stěn s plus počet vrcholů v mínus počet hran h se rovná 2,

$$s + v - h = 2.$$

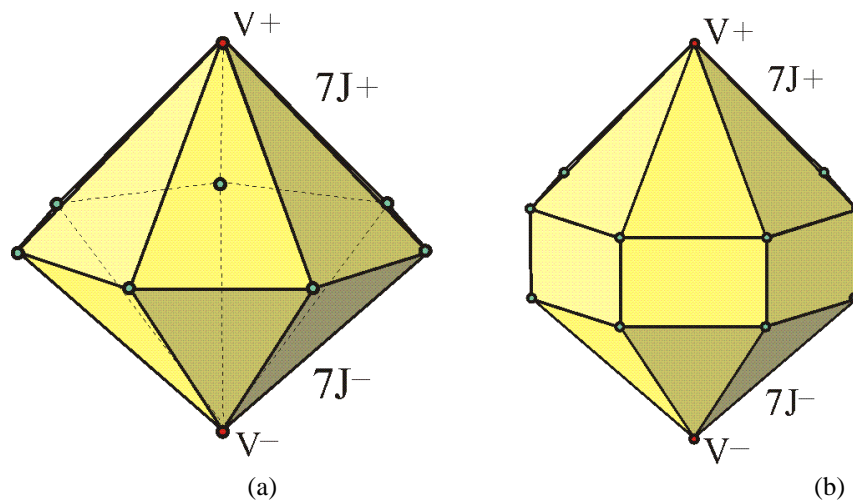
U pravidelných (platónských) těles:

těleso	stěny s	vrcholy v	hrany h	$s + v - h$
čtyřstěn (tetraedr)	4	4	6	2
osmistěn (oktaedr, dvojitý 4-boký jehlan)	8	6	12	2
krychle (hexaedr)	6	8	12	2
dvanáctistěn pětiúhelníkový (dodekaedr)	12	20	30	2
dvacetistěn trojúhelníkový (ikosaedr)	20	12	30	2

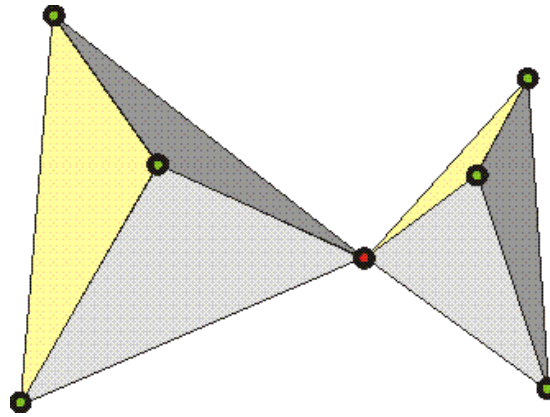
Několik dalších konvexních těles (\cup značí sjednocení):

těleso	stěny s	vrcholy v	hrany h	$s + v - h$
n -boký jehlan (nJ)	$n+1$	$n+1$	$2n$	2
n -boký hranol (nH)	$n+2$	$2n$	$3n$	2
dvojitý n -boký jehlan (nJ^+) \cup (nJ^-) (obr. 3.5a)	$2n$	$n+2$	$3n$	2
kombinace (nJ^+) \cup (nH) \cup (nJ^-) (obr. 3.5b)	$3n$	$2n+2$	$5n$	2

U nekonvexních těles rovnost $s + v - h = 2$ platit nemusí. Například u tělesa složeného ze dvou čtyřstěnů s jediným společným bodem, vrcholem (obr. 3.6) je zřejmé $s = 2 \times 4 = 8$, $v = 2 \times 4 - 1 = 7$, $h = 2 \times 6 = 12$, tedy $s + v - h = 3$.



Obr. 3.5 – Složená konvexní tělesa: (a) dvojitý 7boký jehlan, (b) dvojjeňlan s vloženým hranolem.



Obr. 3.6 – Nekonvexní těleso složené ze dvou konvexních těles, čtyřstěňů, se společným vrcholem.

Topologie a teorie grafů

Je zřejmé, že pokud se tělesa nebo části těles spojitě deformují při zachování vzájemné jednoznačnosti originálu a obrazu bodu, číslo $s + v - h$ se nemění, je invariantem takové deformace. Jde o topologickou charakteristiku geometrického útvaru.

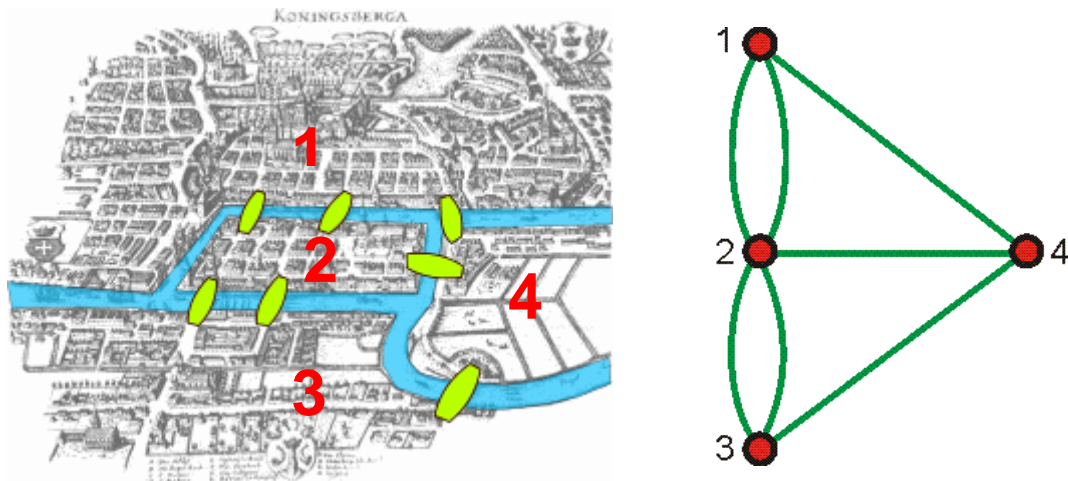
Je-li zobrazení $f: M \rightarrow N$ prosté a jsou-li f i inverzní zobrazení $f^{-1}: N \rightarrow M$ spojitá, nazývá se f topologické (homeomorfní) zobrazení [14].

S úlohou, kde jde jen o charakteristiky propojení oblastí bez ohledu na velikost, se setkáváme například při navrhování rozvodných sítí. Euler se setkal s podobnou úlohou ve známém problému mostů v Královci (Königsberg) v tehdejší Východní Prusku.

Město bylo pojmenováno na počest českého krále Přemysla Otakara II. (1233–1278), který sem 1267 vedl jednu křižáckou výpravu [58].

Úloha zní: dá se najít trasa, která prochází všemi 7 mosty na obr. 3.7 vlevo a vede přes každý most jen jednou? [59]

Protože velikosti ostrova a oblastí přilehajících k řece Pergole (Pregel) jsou nepodstatné a důležité jsou jen spojnice pevné země přes mosty, dá se situace znázornit schématem na obr. 3.7 vpravo.



Obr. 3.7 – Královecké mosty (vlevo) a jejich topologické schéma (vpravo).

Euler 1736 klasifikoval všechny možné typy grafů tohoto typu a dokázal, že úloha nemá řešení. Aby měla řešení, musely by existovat jen 2 uzly (vrcholy), z nichž vychází lichý počet spojníc (hran). Toho by se dosáhlo např. zrušením některé hrany (mostu).

Eulera lze považovat za iniciátora úvah, které později vedly ke vzniku topologie [14] a teorie grafů [60,61] jako dvou dalších matematických disciplin.

3.3. MATEMATICKÁ ANALÝZA

V této oblasti, aspoň v její klasické části, se Eulerovo jméno vyskytuje nejčastěji. Za to vdčíme jeho snaze o systematické vybudování diferenciálního a integrálního počtu. V metodice dnešní výuky se nejdříve naráží na problém konvergence a obecně limity. Příslušné definice podali Bolzano a Cauchy – ale až o století později. Není proto divu, že v dnešním pohledu Euler s řadami zacházel občas nekorektně. Jeho intuice jej dovedla k závěrům, které nás i dnes plní úžasem a ptáme se: jak na to ten Euler mohl přijít?

Začněme geometrickou řadou

$$S(x) = a + ax + ax^2 + \dots = a(1 + x + x^2 + \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Pro $|x| < 1$ je vše pořádku,

$$S(x) = \frac{a}{1 - x}.$$

Pravá strana jako funkce x je však definována na celé reálné přímce, resp. komplexní rovině, s výjimkou bodu $x = 1$. Ale po vykročení z kruhu $|x| < 1$, tj. pro

$|x| \geq 1$, dostáváme zarážející rozdíly mezi částečnými součty $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ a funkcí $(1-x)^{-1}$. Pro ilustraci několik příkladů

x	Řada	Součet	$\frac{1}{1-x}$
3	$1 + 3 + 9 + 27 + \dots$	∞	$-\frac{1}{2}$
-3	$1 - 3 + 9 - 27 + \dots$	neexistuje	$\frac{1}{4}$
1	$1 + 1 + 1 + 1 + \dots$	∞	není definováno
-1	$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$	neexistuje	$\frac{1}{2}$

Sám Euler prý vážně tvrdil [64], že pro $x \neq 1$, $x \neq 0$

$$\dots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \dots = 0,$$

neboť

$$\dots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}, \quad \frac{1}{1-x} - 1 = x + x^2 + \dots \quad \text{a} \quad \frac{1}{1-\frac{1}{x}} + \frac{1}{1-x} - 1 = 0.$$

3.3.1. ČÍSLO e , EXPONENCIÁLA, LOGARITMUS

Číslo e je základem exponenciální funkce a přirozených logaritmů, je iracionální a transcendentní (není kořenem žádného polynomu s celočíselnými koeficienty, Hermite 1873), někdy se mu říká *Eulerovo číslo*. Označení e sice zavedl Euler, ale nikoli podle svého jména, nýbrž proto, že předchozí písmena abecedy už měla definovaný význam [62].

Číslo

$$e = 2.71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995 95749 66967\dots$$

má mnoho jedinečných vlastností [63].

k	$n=2^k$	$d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	$h_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$
1	2	2.25000000	4.00000000
2	4	2.44140625	3.16049383
3	8	2.56578451	2.91028537
4	16	2.63792850	2.80840397
5	32	2.67699013	2.76200909
10	1 024	2.71695573	2.71961030
15	32 768	2.71824035	2.71832331
20	1 048 576	2.71828053	2.71828312
25	33 554 432	2.71828179	2.71828187

Např. mocniny e určují intervaly, v nichž plochy mezi hyperbolou $f(x) = \frac{1}{x}$ a osou x jsou rovny rozdílu exponentů. Tak pro celá čísla $j, k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ dostáváme zase celá čísla

$$\int_{e^j}^{e^k} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{e^j}^{e^k} = k - j.$$

Předchozí tabulka naznačuje cestu k hodnotě e limitním přechodem $n \rightarrow \infty$ u mocnin

$$d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad h_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Nejprve dokážeme, že posloupnost $\{d_n\}$ je rostoucí (3. sloupec tabulky).

Platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow 1 + 1 + \binom{n}{2}n^{-2} + \binom{n}{3}n^{-3} + \mathbf{K} < 2 + \binom{n+1}{2}(n+1)^{-2} + \binom{n+1}{3}(n+1)^{-3} + \mathbf{K}$$

neboť pro $k = 1, 2, \dots$ je $\frac{n-k}{n} < \frac{n+1-k}{n+1}$.

Násobením této nerovnosti kladným faktorem $n(n+1)$ totiž dostaneme

$$(n-k)(n+1) < (n+1-k)n, \text{ tj. } n^2 - nk + n - k < n^2 + n - kn, \text{ tj. } -k < 0,$$

což jistě platí.

Odtud plyne, že pro $k > 0$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}n^{-k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n-1}{n} \mathbf{K} \frac{n-(k-1)}{n} < \frac{1}{k!} \frac{n+1-1}{n+1} \mathbf{K} \frac{n+1-(k-1)}{n+1} \\ &< \binom{n+1}{k}(n+1)^{-k}. \end{aligned}$$

Zřejmě tedy

$$d_n = \binom{n}{k}n^{-k} < \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k}(n+1)^{-k} < \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k}(n+1)^{-k} + (n+1)^{-(n+1)} = d_{n+1}.$$

Podobně se dá dokázat, že posloupnost $\{h_n\}$ je klesající, tj. $h_{n+1} < h_n$, $n = 1, 2, \dots$

K tomu, aby posloupnosti $\{h_n\}$ a $\{d_n\}$ konvergovaly ke stejnému číslu, stačí, aby rozdíly jejich členů pro $n \rightarrow \infty$ konvergovaly k nule, $h_n - d_n \rightarrow 0$. Dokážeme, že tomu tak je.

$$h_n - d_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^n\right] = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \left[1 - \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n\right].$$

Víme, že $\{h_n\}$ je klesající. Proto pro $n > 2$ je první činitel na pravé straně < 4 (tabulka). V hranaté závorce je rozdíl n -tých mocnin. Je tedy

$$h_n - d_n < 4 \left[1 - \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n\right] = 4 \frac{1}{n^2} \left[1 + \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) + \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1}\right]$$

Protože $\frac{n^2-1}{n^2} < 1$, je součet mocnin tohoto podílu v poslední hranaté závorce $< n$ a

$$0 < h_n - d_n < 4 \frac{1}{n^2} n = \frac{4}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Poznámka. K číslu e jako $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ poprvé dospěl *Jakob Bernoulli* 1683 v souvislosti se složeným

úrokem. Je-li roční úrok $p\%$, násobí se vložená částka po prvním roce $(1+p/100)$, po k letech $(1+p/100)^k$, po $100/p$ letech $(1+p/100)^{100/p}$. Nyní stačí zavést $n = 100/p$ (měli bychom uvažovat celou část $100/p$ atd.).

Podobně, značí-li p konstantní pravděpodobnost výskytu nějakého jevu, je pravděpodobnost, že jev při $1/p$ pokusech nenastane, $P(p) = (1-p)^{1/p}$ a pro $p \rightarrow 0$ platí $(1-p)^{1/p} \rightarrow e^{-1}$.

Euler vypočetl e na 18 desetinných míst (1748), 1853 bylo známo 137 cifer, 1949 J. von Neumann vypočetl e na 2 010 cifer, v roce 2000 byla určena zhruba miliarda a 2009 už 200 miliard cifer e [63].

V 17. a v první polovině 18. století se s limitami ještě nepočítalo rigorózně — postupovalo se heuristicky. Položíme formálně [64]

$$e = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$$

a použijeme binomického rozvoje

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\infty}{k} \left(\frac{1}{\infty}\right)^k.$$

Pro každé konečné k je $\binom{\infty}{k} = \frac{\infty(\infty-1)\dots(\infty-k+1)}{k!} = \frac{\infty^k}{k!}$, načež

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\infty^k}{k!} \left(\frac{1}{\infty}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\infty^k}{\infty^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Úplně stejně lze pro libovolné konečné reálné nebo komplexní x “odvodit“, že

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{\infty}\right)^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\infty}{k} \left(\frac{x}{\infty}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\infty^k}{k!} \left(\frac{x}{\infty}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Jak snadné! To je ukázka magie čísel a triků s nekonečnem. Takové manipulace přes svou nekorektnost byly bohatým zdrojem inspirace a nečekaných objevů [64]. Korektní cesta vede přes rozvoj e^x v Taylorovu řadu [14].

•

Rozvoj $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ se např. v knize [65] objevuje jako stěžejní bod na samém

začátku a slouží k definici exponenciály $\exp(z) = e^z$ v komplexní rovině. Logaritmus (přirozený), $\ln z$, je inverzní funkcí k exponenciále, $z = e^{\ln z}$.

Jak se učí už na střední škole, komplexní číslo lze psát v goniometrickém tvaru

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kde $\operatorname{Re} z$ je reálná část, $\operatorname{Im} z$ je imaginární část, $|z|$ je absolutní velikost, *amplituda*, a φ je fáze nebo *argument* z . Tím se počítání s komplexními čísly podstatně zjednoduší.

Položíme-li $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ a $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, je součin 2 komplexních čísel

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Známe-li *součtové vzorce* pro funkce \sin a \cos ,

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

vidíme, že

$$z_1 \times z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Součtové vzorce plynou z rovinné transformace otočení kolem počátku. Jak ukázal Euler, otočení o úhel ξ přísluší matice

$$\mathbf{R}(\xi) = \begin{pmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ -\sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix}.$$

Složené otočení o úhel $\gamma = \alpha + \beta$ reprezentuje součin transformačních matic

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\gamma) &= \mathbf{R}(\alpha) \mathbf{R}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ a $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

Při násobení komplexních čísel se tedy amplitudy násobí a argumenty sečtou.

Pro $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ nabudou součtové vzorce tvar

$$\begin{aligned} \cos(2\varphi) &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1, \\ \sin(2\varphi) &= 2 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

(Z rovností $\cos(2\varphi) = 2 \cos^2 \varphi - 1 = 1 - 2 \sin^2 \varphi$ plynou vzorce pro poloviční úhel:

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}}, \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}}.$$

Tak jsme zvládli případ 2. mocniny komplexního čísla,

$$z^2 = |z|^2 (\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)).$$

Předpokládejme nyní, že pro $n > 2$ platí

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

a počítejme

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n z = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \times |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= |z|^{n+1} (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \times (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= |z|^{n+1} [(\cos(n\varphi) \cos \varphi - \sin(n\varphi) \sin \varphi) + i (\sin(n\varphi) \cos \varphi + \cos(n\varphi) \sin \varphi)]. \end{aligned}$$

Podle součtových vzorců

$$z^{n+1} = |z|^{n+1} \{ \cos[(n+1)\varphi] + i \sin[(n+1)\varphi] \}.$$

Tím jsme úplnou indukci zároveň dokázali *Moivreovu větu*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

(Abraham de Moivre (1667–1754) [66])

Podle binomické věty je

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \varphi i^k \sin^k \varphi \\ &= \sum_{k=0, k \text{ sudé}}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \varphi (-1)^{k/2} \sin^k \varphi + i \sum_{k=0, k \text{ liché}}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \varphi (-1)^{(k-1)/2} \sin^k \varphi. \end{aligned}$$

Odtud můžeme dostat obecnější součtové vzorce

$$\cos(n\varphi) = \sum_{k=0, k \text{ sudé}}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \varphi (-1)^{k/2} \sin^k \varphi,$$

$$\sin(n\varphi) = \sum_{k=0, k \text{ liché}}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \varphi (-1)^{(k-1)/2} \sin^k \varphi.$$

Takže např.

$$\cos(4\varphi) = \cos^4 \varphi - 6 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi = \cos^2(2\varphi) - \sin^2(2\varphi),$$

$$\sin(4\varphi) = 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi = 2 \sin(2\varphi) \cos(2\varphi),$$

atd.

•

Zvolme $z = it$, kde t je nějaké reálné číslo. Dosazení do rozvoje $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ dá

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k t^k}{k!} = \sum_{k=0, k \text{ sudé}}^n \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!} (-1)^{k/2} + i \sum_{k=1, k \text{ liché}}^n \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!} (-1)^{(k-1)/2} \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots\right) + i \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots\right). \end{aligned}$$

Na posledním řádku jsou v závorkách Taylorovy rozvoje funkcí $\cos t$ a $\sin t$. Tím jsme dospěli k slavné *Eulerově formuli* (i když ji znal už Johann Bernoulli a jiní [5]),

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Tu mnozí považují za nejobdivuhodnější matematickou relaci vůbec.

Zřejmě

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t,$$

takže sčítáním a odčítáním obou rovnic dostáváme důležité vyjádření funkcí sinus a cosinus pomocí exponenciál

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

rovněž připisované Eulerovi.

Pro $t = \pi$ z Eulerovy formule plyne další elegantní vztah

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

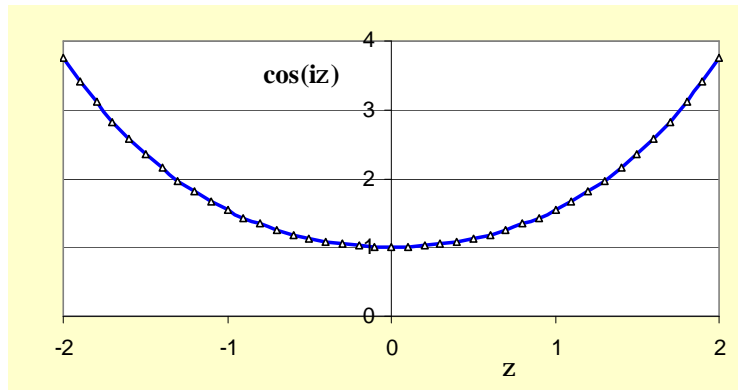
Pěkná animace funkcí \sin a \cos ve spojitosti s exponenciální funkcí imaginární proměnné je v [67].

Poznámka. Pravé strany posledních rovností připomínají hyperbolické funkce. A skutečně

$$\cos z = \cosh(iz), \quad \sin z = -i \sinh(iz).$$

Pro ryze imaginární hodnoty z , $z = \zeta i$, ζ reálné, dostaneme $\cos(\zeta i) = \cosh(-\zeta)$. To je sudá funkce, $\cosh(-\zeta) = \cosh(\zeta) \geq 1$, s minimem $\cosh(0) = 1$ a pro $\zeta \neq 0$ je $\cos(\zeta i) > 1$, $\cos(\zeta i) \rightarrow +\infty$ pro $\zeta \rightarrow \pm\infty$ (obr. 3.8).

Hodnoty sinu ryze imaginární proměnné jsou však ryze imaginární a tím méně zajímavé.



Obr. 3.8 – Graf funkce $\cos(i\zeta) = \cosh(\zeta)$ pro $-2 < \zeta < 2$.

Vraťme se k obecné exponenciále

$$\exp(z) = e^z = w = |w| (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Dá se z komplexního čísla w zpětně určit příslušné z ? U reálné exponenciály, $w=y$, $z=x$, je to snadné: z relace $y = e^x$ (> 0) plyne $x = \ln y$ (je totiž $y = \exp(\ln y) = \exp(x)$ a z jednoznačnosti exponenciály plyne $\ln y = x$).

Rovnost $e^z = |w| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ přepíšme do tvaru (Eulerova formule)

$$e^z = e^{\ln |w|} e^{i\varphi} = e^{\ln |w| + i\varphi}.$$

Vzhledem k periodicitě trigonometrických funkcí je $\exp(i\varphi)$ rovněž 2π -periodická a

$$\exp(\ln |w| + i\varphi) = \exp(\ln |w| + i\varphi + i2k\pi),$$

kde $0 \leq \varphi < 2\pi$, tzv. hlavní část argumentu a k je celé, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Dělením rovnosti

$$\exp(z) = \exp(\ln |w| + i\varphi + 2k\pi i)$$

její pravou stranou (předpokládáme $\neq 0$) dostaneme

$$\exp[z - (\ln |w| + i\varphi + 2k\pi i)] = 1 = \exp(0),$$

tj.

$$z = \ln(w) = \ln |w| + i\varphi + 2k\pi i.$$

Tím jsme definovali *přirozený logaritmus* v komplexní rovině. Je zřejmé, že díky členu $2k\pi i$ je logaritmus *mnohoznačnou funkcí*.

Příklady.

- $\sqrt[5]{4+3i} = [\sqrt{4^2+3^2} \exp(i \arctan \frac{3}{4}) \times \exp(2k\pi i)]^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{1}{5}} \exp[i \frac{1}{5} \arctan(\frac{3}{4})]$
 $= 5^{\frac{1}{5}} [\cos(\frac{1}{5} \arctan \frac{3}{4}) + i \sin(\frac{1}{5} \arctan \frac{3}{4})] \approx 1.368318679 + 0.177081711 i.$
- $i^i = [\exp(\ln i)]^i = [\exp(\ln |i| + i\pi/2 + 2k\pi i)]^i = [\exp(0) \times \exp(i\pi/2) \times \exp(2ki\pi)]^i$
 $= \{1 \times e^{i\pi/2} \times [\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)]\}^i = \{e^{i\pi/2}\}^i = e^{-\pi/2} = 0.20787957635\dots$
- $(1+i\sqrt{3})^{3+3i} = [\sqrt{1+3} \exp(i \arctan \sqrt{3} + 2k\pi i)]^{3(1+i)} = 2^{3(1+i)} \exp[i\pi/3 \times 3(1+i)] \times 1^{3(1+i)}$
 $= 8 \times 8^i \times e^{i\pi-1} = 8e^{-1} \times e^{i \ln 8} \times e^{i\pi} = 8e^{-1} [\cos(\ln 8) + i \sin(\ln 8)] \times [\cos \pi + i \sin \pi]$
 $= -8 e^{-\pi} [\cos(\ln 8) + i \sin(\ln 8)] \approx 0.1683595 - 0.301946 i.$

Derivace

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \exp(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots - 1}{h} \\ &= e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots}{h} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \left[1 + h \left(\frac{1}{2!} + \frac{h}{3!} + \dots \right) \right] = e^z. \end{aligned}$$

Odtud ihned plyne, že primitivní funkce k e^z je $e^z + C$ (kde C je libovolná konstanta):

$$\int e^z dz = e^z + C.$$

3.3.2. ŘADY A NEKONEČNÉ SOUČINY

Jakmile se začne uvažovat o nekonečných součtech, je hned jasné, že k tomu, aby vyšel konečný součet, musí členy sčítané nekonečné posloupnosti konvergovat k 0. U alternujících řad (se střídáním znaménka u jednotlivých členů) je to zároveň podmínka postačující [14] (Leibnizovo kritérium). U řad s kladnými členy, popř. při vyšetřování absolutní konvergence, se dá použít srovnání s majorantní geometrickou řadou $\Sigma\{q^k: k = 0, 1, 2, \dots\}$, $0 \leq q < 1$, tedy takovou, že $|a_k| \leq q^k$.

Je-li $|a_k| \leq q^k$, platí pro zbytek R_n

$$0 \leq R_n = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} q^k = q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}$$

a pravou stranu lze volbou dostatečně velkého n libovolně přiblížit k 0. V takovém případě řada $\Sigma\{a_k: k = 0, 1, 2, \dots\}$ absolutně konverguje. Pokud žádné takové q neexistuje, stává se chování řady Σa_k méně určité: někdy konverguje, jako např.

alternujících řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k = \ln 2 = 0.693147\dots$, jindy diverguje jako např.

harmonická řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$.

U harmonické řady se chvilku zdržíme. Předně ji porovnáme s geometrickou řadou.

Podíl dvou po sobě následujících členů je $Q_k = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} \right| = \frac{k}{k+1}$, u geometrické

řady je tento podíl $\frac{q^{k+1}}{q^k} = q$. Zvolíme-li jakékoli $0 < q < 1$, můžeme vždy zvolit k

tak, aby $\frac{k}{k+1} > q$, (totiž $k > \frac{q}{1-q}$, např. pro $q = 1-10^{-20}$ je $\frac{q}{1-q} = (1-10^{-20}) 10^{+20} = 10^{+20} - 1$). Totéž

říká limitní přechod $k \rightarrow \infty$ u posloupnosti Q_k . Žádná konvergentní geometrická majorantní řada k harmonické řadě neexistuje. Srovnání s geometrickou řadou nám tedy žádnou informaci nepřineslo.

Chování řady $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ je určeno chováním zbytku $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$ (součet předchozích

členů $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ je konečný a o něj se zajímat nemusíme). V našem jednoduchém

případě k odhadu zbytku můžeme použít minorantní hyperbolu.

Pro libovolná celá kladná $n, m, n < m$ je

$$\int_n^m \frac{dx}{x} = \ln \frac{m}{n} = \ln \left(\frac{n+1}{n} \frac{n+2}{n+1} \dots \frac{m-1}{m-2} \frac{m}{m-1} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{m-1} \right)$$

$$< \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k-1}.$$

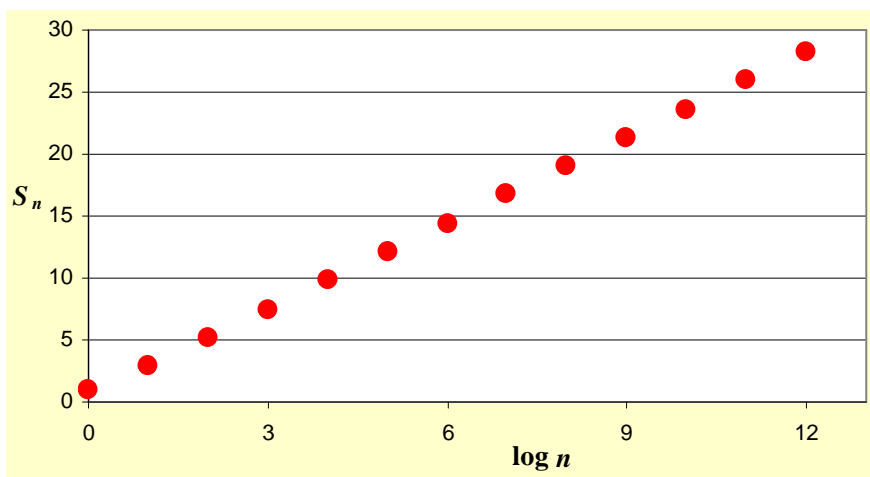
Nerovnost $\ln \frac{m}{n} < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k-1} = S_{m-1} - S_{n-1}$ ukazuje, že pro libovolné n je např.

$|S_{2n-1} - S_{n-1}| = S_{2n-1} - S_{n-1} > \ln 2$ a není splněna Bolzanova–Cauchyho nutná a

postačující podmínka konvergence posloupnosti částečných součtů S_n a tím i

harmonické řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Chování této řady ilustruje následující tabulka a obr. 3.9.

n	10^3	10^6	10^9	10^{12}
S_n	7.48547086	14.39272672	21.30048150	28.20823678



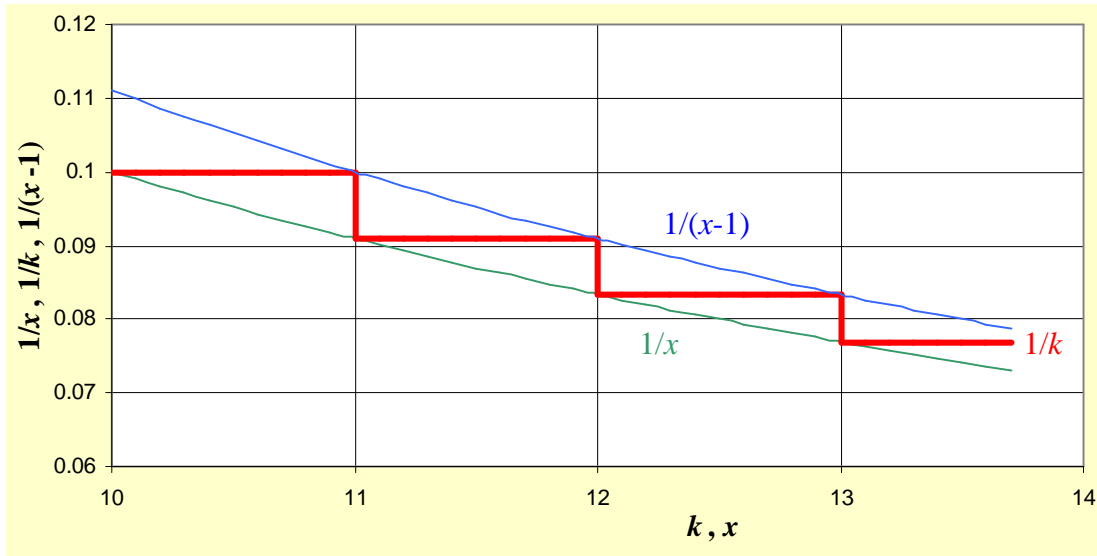
Obr. 3.9 – Částečné součty harmonické řady rostou téměř lineárně s dekadickým logaritmem n .

Aproximace součtů harmonické řady lineární závislostí na logaritmu horní meze znovu potvrzuje divergenci harmonické řady. Stejně závěry budou platit i pro řadu

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},$$

kde $s < 1$, neboť $\frac{1}{k^s} > \frac{1}{k}$. Naopak pro $k > 1$ a $x \in [k, k+1]$ je (obr. 3.10)

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x-1}.$$



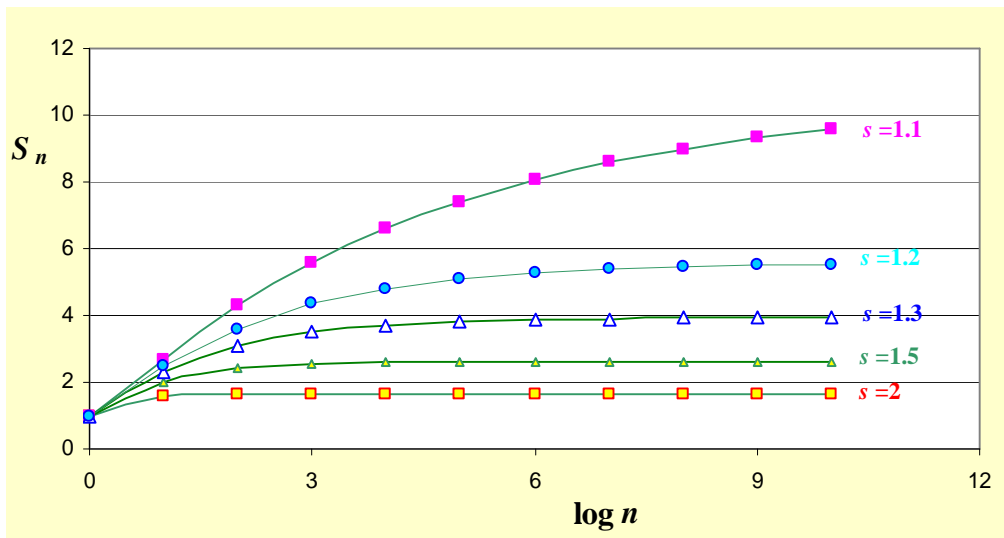
Obr. 3.10 – Poslopnost $\{1/k\}$ jako schodovitá funkce mezi hyperbolami $1/x$ a $1/(x-1)$.

Pro $s > 1$ $\left(\frac{1}{x}\right)^s = x^{-s} < \frac{1}{k^s} < \left(\frac{1}{x-1}\right)^s$, takže

$$\int_n^\infty x^{-s} dx = \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_n^\infty = \frac{1}{s-1} \frac{1}{n^{s-1}} \leq \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^s} \leq \int_n^\infty x^{-s} dx = \frac{1}{1-s} (x-1)^{1-s} \Big|_n^\infty = \frac{1}{s-1} \frac{1}{(n-1)^{s-1}}.$$

Protože $\frac{1}{s-1} \frac{1}{n^{s-1}}$ i $\frac{1}{s-1} \frac{1}{(n-1)^{s-1}}$ konvergují pro $n \rightarrow \infty$ k 0, plyne odtud pro $s > 1$

konvergence $\sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^s}$. Několik numerických příkladů předvádí obr. 3.11.



Obr. 3.11 – Rychlost konvergence částečných součtů pro různé exponenty s .

Funkci, kterou jsme označili podle Riemanna $\zeta(s)$ [68], vyšetřoval pro $s > 1$ už Euler. Roku 1735 ve věku 28 let rozřešil tzv. *basilejský problém* [69]: čemu se rovná

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$? Nikomu před ním, ani Bernoulliům, se nepodařilo najít odpověď. Eulerův

postup je podrobně vyloženo v práci [70].

n	$S_n(2)$
10^1	1.5497677317
10^2	1.6349839002
10^3	1.6439345667
10^4	1.6448340718
10^5	1.6449240669
10^6	1.6449330668
10^7	1.6449339668
10^8	1.6449340568
10^9	1.6449340658
10^{10}	1.6449340666

Součty sudých mocnin $\frac{1}{k}$ se dnes zmiňují v teorii funkcí

komplexní proměnné jako příklad aplikace rozvoje funkce $\cot z = \cos z / \sin z$ v Taylorovu (či Laurentovu) řadu a reziduové věty [71, 72, 14]. Euler však byl mistr manipulací s řadami a delším postupem [70] dospěl k výsledku, že

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.644\ 934\ 066\ 848\dots$$

Později ukázal, že

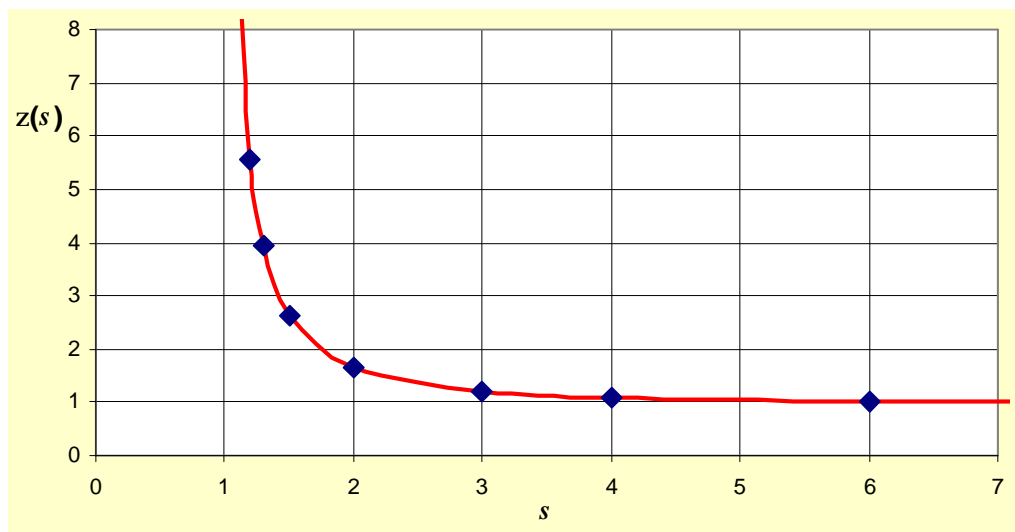
$$\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} = 1.082\ 323\ 233\ 711\dots$$

a obecně pro sudá čísla $\zeta(2n) = \frac{|B_{2n}|}{(2n)!} \frac{\pi^{2n}}{2}$, kde B_{2n} jsou Bernoulliho čísla (= koeficienty

rozvoje $\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$). Dále platí $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0$ [72], což po zadání $B_0 = 1$

umožňuje snadné rekurentní počítání B_k na počítači. Tabulka B_k je na str. 51. Další informace a seznam B_{2k} ve tvaru zlomků (podílů celých čísel) pro $k = 1, \dots, 20$ jsou v [73]).

Je ovšem jasné, že s rostoucím s rychlost konvergence řad $\zeta(s)$ roste, takže numerický výpočet hodnoty funkce ζ např. při přesnosti 10^{-14} pak nevyžaduje velká n : pro $s = 6$ stačí $n = 10^3$, pro $s = 8$ stačí $n = 100$ atd.



Obr. 3.12 – Průběh funkce $\zeta(s)$ pro reálná s , $s > 1$.

Aproximace posloupnosti $\{\frac{1}{k}\}$ funkcí $\frac{1}{x}$ vede přirozeně k otázce týkající se velikosti rozdílu mezi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ a $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$. Důsledkem dříve uvedené nerovnosti

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x-1}$$

platné na intervalech $[k, k+1]$ je fakt, že čísla

$$c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

jsou kladná a vytvářejí klesající posloupnost. To ilustruje následující tabulka.

$\log n$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$
1	2.9289682540	0.6263831610
2	5.1873775176	0.5822073316
3	7.4854708606	0.5777155816
4	9.7876060360	0.5772656640
5	12.0901461299	0.5772206649
6	14.3927267229	0.5772161649
7	16.6953113659	0.5772157149
8	18.9978964139	0.5772156699
9	21.3004815023	0.5772156654
10	23.6030665949	0.5772156650
11	25.9056516878	0.5772156649
12	28.2082367808	0.5772156649

Dále z nerovností

$$0 \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

plyne

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx &= \frac{1}{k} - [\ln(k+1) - \ln k] \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx \\ &= [\ln k - \ln(k-1)] - [\ln(k+1) - \ln k] \end{aligned}$$

a sčítáním dostaneme

$$0 \leq c_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \ln n \leq \ln 2 - \ln 1 - \ln \frac{n+1}{n} < \ln 2.$$

Posloupnost $\{c_n\}$ je tedy shora i zdola omezená, je klesající a má tedy konečnou limitu. Euler ji značil C a v ruské literatuře toto označení zůstalo dodnes, ale v západní literatuře se vzhledem k souvislosti s funkcí Γ tato *Eulerova konstanta* začala značit (podle Mascheroniho) γ [74], řeckého ekvivalentu c . Euler 1734 určil γ na 5 desetinných míst, 1736 na 15 míst, Gauss 1811 na 22 míst atd. Dnes je konstanta γ známa na desítky miliard cifer [75]. Iracionalitu γ dokazuje práce [76]. Zde je prvních 60 cifer γ [77]:

$$\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ 40243\ 10421\ 59335\ 93992\ 35988\ 05767\dots$$

Každé přirozené číslo n lze jednoznačně rozložit na prvočinitele,

$$n = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k},$$

kde $k \geq 1$, $p_1 < \dots < p_k$ jsou prvočísla a $m_1, \dots, m_k \geq 1$ (to je tzv. základní věta aritmetiky, kterou explicitně vyslovil, dokázal a 1801 publikoval C. F. Gauss [16]).

Např. všechny násobky čísel 2, 3, 5 mají tvar $2^{m_1} \times 3^{m_2} \times 5^{m_3}$ a dostaneme je násobením posloupností

$$\{1, 2, 2^2, 2^3, \dots\} \times \{1, 3, 3^2, 3^3, \dots\} \times \{1, 5, 5^2, 5^3, \dots\} = \{1, 2, 3, 2^2, 5, 2 \times 3, 2^3, 3^2, 2 \times 5, \dots\}.$$

Dostali jsme všechna čísla < 7 a 7 je první prvočíslo > 5 . Přibereme-li 7 do součinu $2^{m_1} \times 3^{m_2} \times 5^{m_3} \times 7^{m_4}$ dostaneme se k 11. Totéž platí pro každé další prvočíslo.

Eulerovi napadlo využít rozvoje

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{p}\right)^2 + \dots = 1 + p^{-1} + p^{-2} + \dots,$$

pro prvočíslo p k vytvoření harmonické řady. Např.

$$(1 + 2^{-1} + 2^{-2}) \times (1 + 3^{-1}) \times (1 + 5^{-1}) \\ = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right] + \left[\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60}\right]$$

atd.

Harmonická řada vznikne násobením faktorů $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$, kde p_k je prvočíslo, $k = 1, 2, \dots$

Kdyby $K < \infty$, byl by součin

$$P_K = \prod_{k=1}^K \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \frac{1}{\prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)}$$

konečný. Protože však $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, musí být i počet prvočísel $K = +\infty$.

Z divergence $P_K \rightarrow +\infty$ plyne rovnost $\lim_{K \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = 0$, tedy $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = 0$.

Z vlastností nekonečných součinů dále plyne, že řada kladných čísel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ nemůže

konvergovat a je tedy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$. To je další významný Eulerův poznatek. Tedy přes značné rozředění počtu sčítanců (pro velká n je počet $N(n)$ prvočísel menších než přirozené číslo n přibližně $\frac{n}{\ln n}$ [16]) dostaneme zase divergentní řadu.

Poznámka. Posloupnost částečných součtů $P_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k}$ roste stejně rychle jako $\ln(\ln n)$,

$$P_n - \ln(\ln n) \rightarrow 0.26\dots$$

(více je v [78]).

3.3.3. VÝPOČET INTEGRÁLŮ

Z Eulerových knih o diferenciálním a integrálním počtu čerpají látku i dnešní učebnice – často beze zmínky o jejich původním autorovi, neboť věcný obsah vyplývá přirozeně z kontextu [79]. Příkladem mohou být substituce v integrálech, jejichž reálný integrand je racionální funkce odmocniny z kvadratického trojčlenu $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Eulerovy substituce zavádějí novou proměnnou u podle následující tabulky [80]:

Podmínka	Substituce
$a > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = u - \sqrt{ax}$
$c > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = ux + \sqrt{c}$
$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, $x_1 \neq x_2$, reálné	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = u(x-x_1)$

Poznámka. Dnešní výuka matematické analýzy je pochopitelně obsažnější ale také stručnější než v 18. století. Zmenšil se prostor pro intuitivní chápání a zvětšil se důraz na přesnost, na pochopení a logické manipulace s důsledky definic a podmínek. Řešení konkrétních úloh se přenechává vlastní iniciativě posluchačů v doplňujících cvičeních.

Snaha zvládnout integraci stále širšího okruhu funkcí vedla Eulera k výpočtu mnoha nevlastních integrálů způsoby, které dnes např. demonstrují limitní přechod a derivování podle parametru v teorii integrálu nebo použití Cauchyho věty v teorii funkcí komplexní proměnné [14,65, 72,80,81]. Jako *Eulerovy integrály* se označují integrály

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \text{ pro } 0 < a < 1, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\tan a\pi} - \frac{\pi}{\tan b\pi} \text{ pro } 0 < a, b < 1$$

a další. Podrobné výpočty těchto integrálů lze najít např. v [80].

Zde si ukažme kostru stanovení jiného Eulerem vypočteného integrálu,

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx \text{ pro } a > 0.$$

Integrál $I(a)$ je neabsolutně konvergentní (a jako Lebesgueův integrál [14] neexistuje). Násobením integrandu konvergenčním faktorem e^{-bx} , $b > 0$, vytvoříme integrál

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} e^{-bx} \frac{\sin ax}{x} dx,$$

s jehož existencí není žádný problém, neboť $|e^{-bx} \frac{\sin ax}{x}| \leq e^{-bx}$ a $\int_0^{\infty} e^{-bx} dx = \frac{1}{b}$. Funkce

$\frac{\partial}{\partial a} (e^{-bx} \frac{\sin ax}{x}) = e^{-bx} \cos ax$ je integrovatelná ($|e^{-bx} \cos ax| \leq e^{-bx}$), takže

podle věty o derivování integrálu podle parametru [14,80,81]

$$\frac{\partial}{\partial a} I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(e^{-bx} \frac{\sin ax}{x} \right) dx = \int_0^{\infty} e^{-bx} \cos ax \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

(integrace per partes nebo [80-82]).

Proto

$$\int \frac{\partial}{\partial a} I(a, b) \, da = \int \frac{b}{a^2 + b^2} \, da = \arctan \frac{a}{b}.$$

Integrál $I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx$ dostaneme z $I(a, b)$ limitním přechodem $b \rightarrow 0+$,

$$I(a) = \lim_{b \rightarrow 0+} I(a, b) = \lim_{b \rightarrow 0+} \arctan \frac{a}{b}.$$

Pro $a > 0$ je $I(a)$ konstanta nezávislá na a . Speciálně tedy pro $a = 1$ je

$$I(1) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Integrál $I(1)$ poprvé korektně vypočetl N. I. Lobačevskij (1792–1856) [80].

3.3.4. FUNKCE BETA A GAMMA.

Pod Eulerovými integrály se obvykle rozumí jiné, důležitější integrály — funkce Γ a B :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \, dt, \quad s > 0 \quad \text{— Eulerův integrál 2. druhu, gamma funkce}$$

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} \, dt, \quad p, q > 0 \quad \text{— Eulerův integrál 1. druhu, beta funkce}$$

Tyto funkce mají mnoho zajímavých vlastností, proto v učebnicích zpravidla zabírají celou kapitolu. Zde pochopitelně můžeme odkázat jen na literaturu [80,81] nebo internet a ukázat jen několik vlastností.

Funkce Γ .

Funkce Γ je důležitější, proto ji uvádíme jako první. Integrací per partes dostaneme

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \, dt = -e^{-t} t^{s-1} \Big|_0^{\infty} + (s-1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-2} \, dt = (s-1) \Gamma(s-1).$$

Zřejmě $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \, dt = 1$, $\Gamma(2) = (2-1) \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = (3-1) \Gamma(2) = 2 \times 1 = 2!$

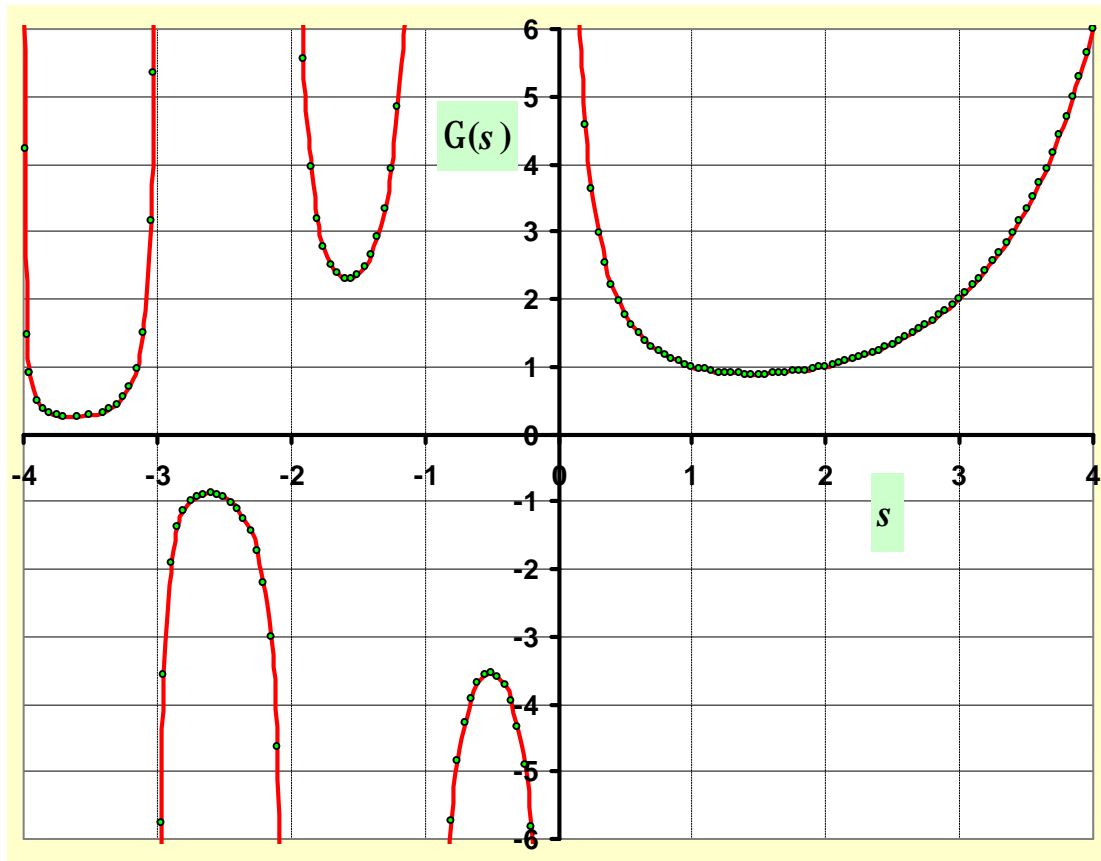
a pro přirozené n je tedy $\Gamma(n) = (n-1)!$, resp. $n! = \Gamma(n+1)$. Funkce Γ tedy představuje

zobecnění faktoriálu, o němž přemítali Christian Goldbach a Daniel Bernoulli. Euler uvažoval s jako reálné číslo různé od 0 a záporných celých čísel. Ale, jak uvidíme za chvíli, definiční obor Γ se dá rozšířit na komplexní rovinu \mathbf{C} , z níž jsou vyňata záporná celá čísla a 0, tedy na $\mathbf{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$.

Z hlediska numerických výpočtů pro reálná s stačí aproximovat funkci Γ kvalitním polynomem na intervalu $[1, 2]$. Znalost $\Gamma(s)$ pro s z intervalu $[1, 2]$ a vlastnost $\Gamma(s) = (s - 1) \Gamma(s - 1)$ umožňuje získat hodnotu Γ pro s vně tohoto intervalu, tedy pro $s \in (-\infty, +\infty) - \{0, -1, -2, \dots\}$. V EXCELU získáme hodnotu $\Gamma(s)$ pro kladné s přímo jako $\exp(\text{gamma}(\ln(s)))$. Pro $-1 < s < 0$ použijeme rovnosti $\Gamma(s) = \Gamma(s+1)/s$, pro $-n < s < -n+1, n = 2, 3, \dots$ hodnoty Γ pro argument o jednotku větší. Např.

$$\Gamma(-2.5) = \Gamma(-1.5)/(-2.5) = \Gamma(-0.5)/[(-2.5)(-1.5)] = \Gamma(0.5)/[(-2.5)(-1.5)(-0.5)].$$

Graf funkce $\Gamma(s)$ pro reálné s je na obr. 3.13.

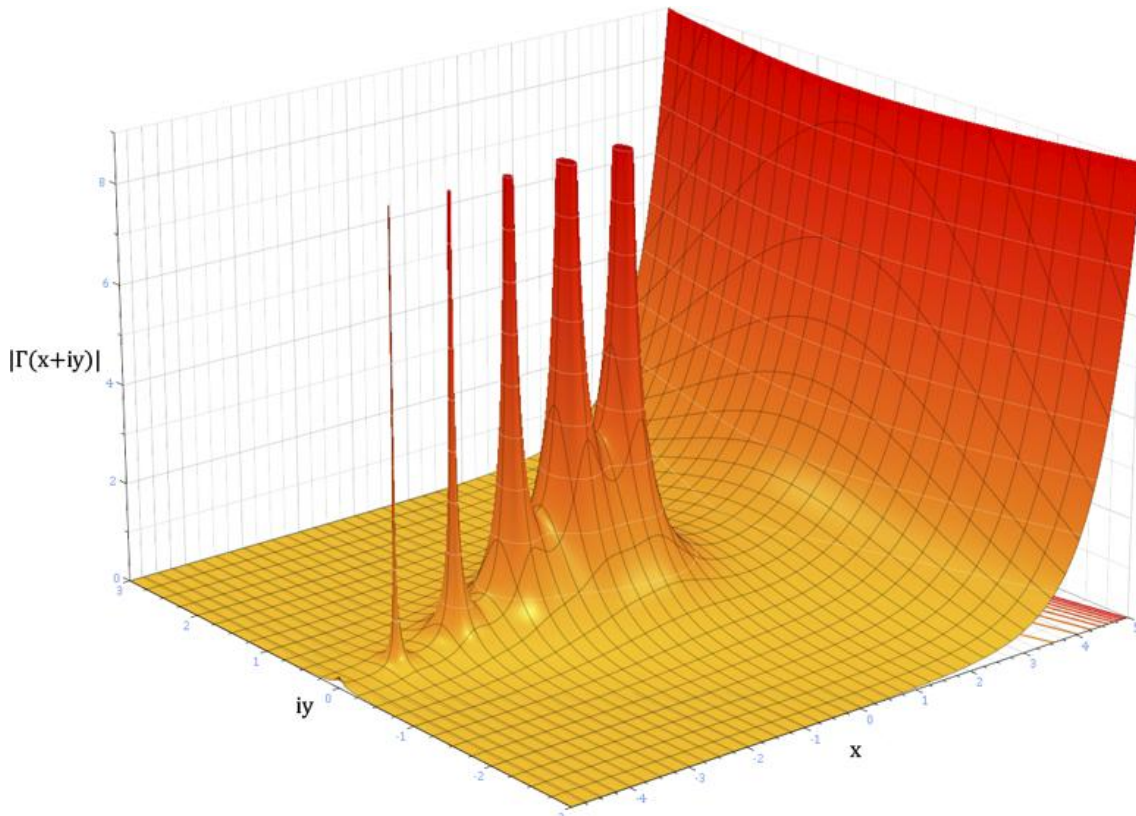


Obr. 3.13 – Graf funkce Γ v okolí počátku.

Obr. 3.13 ukazuje, že funkce Γ pro větší kladná velmi rychle roste. Velkých absolutních hodnot nabývá také v okolí 0 a v okolí záporných celých čísel. Převrácená hodnota, $\Gamma^{-1}(s)$, se však chová krotce a pro $s = 0, -1, -2, \dots$ lze definovat $\Gamma^{-1}(s) = 0$. Proto se pro komplexní z někdy vychází z definice převrácené hodnoty funkce Γ pomocí nekonečných součinů [71,72]:

Euler:
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{z}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}$$

Weierstrass:
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right], \quad \gamma = 0.5772\dots, \text{ Eulerova konstanta.}$$



Obr. 3.14 – Absolutní hodnota funkce $\Gamma(z)$ pro komplexní z v okolí počátku [86].

Weierstrassovy reprezentace funkce gama se dá použít k rychlému odvození vzorce

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Je totiž

$$\frac{1}{\Gamma(z) \Gamma(1-z)} = \frac{1}{-z \Gamma(z) \Gamma(-z)} = z e^{\gamma z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} e^{\frac{z}{n}} \right] = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Avšak, jak se dokazuje v matematické analýze [65,71,72], $\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n\pi)^2}\right)$. Pak

ovšem

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{n^2 \pi^2}\right) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\pi}{\Gamma(z) \Gamma(1-z)} \quad \text{a} \quad \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Funkce Γ má mnoho dalších zajímavých vlastností, ale nezbyvá, než odkázat na literaturu a internet. Zde uvedeme jen dvě:

(i) Výpočet hodnoty

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Substitucí $x = t^2$ ($t(x) = \sqrt{x}$, tj. meze $t(0) = 0$, $t(\infty) = \infty$, $dx = 2t dt$) přejde v Eulerův–Poissonův integrál [81] (dnes známý jako Laplaceův integrál Φ)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} 2t dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

jehož výpočet je uveden např. v [14]. Tato hodnota se uplatňuje u často užívaných rozdělení pravděpodobnosti [84,85]. Dostaneme ji okamžitě dosazením $z = \frac{1}{2}$ do

$$\text{vzorce } \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

(ii) Stirlingův odhad $\Gamma(1+s)$ pro velká $s > 0$

$$\Gamma(1+s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^s dt \approx s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s} \quad [81], \text{ resp. } s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s} e^{\frac{\theta_s}{12s}} \quad (0 < \theta_s < 1) \quad [80].$$

Pro $s = n$ (celé, kladné) [84,85]

$$\Gamma(1+n) = n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}.$$

•

Funkce B (beta)

čili Eulerův integrál 1. druhu je funkce dvou proměnných $p, q > 0$

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

Substitucí $t = 1 - x$ se snadno dokáže symetrie $B(p, q) = B(q, p)$.

Věta. Pro $p, q > 0$ platí

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Důkaz (podle C. G. J. Jacobiho (1804–1851) [81]). Vyšetřujme součin

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \times \int_0^{\infty} e^{-y} y^{q-1} dy.$$

Součin obou integrandů $e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1}$ je funkce integrovatelná v 1. kvadrantu $(0, \infty) \times (0, \infty)$, takže podle Fubiniho věty [14,81]

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = \iint_{(0, \infty) \times (0, \infty)} e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1} dx dy.$$

Označme $G = (0, \infty) \times (0, 1) = \{(u, v) : u \in (0, \infty), v \in (0, 1)\}$. Vzájemně jednoznačné a regulární zobrazení G na $(0, \infty) \times (0, \infty)$ [14,81],

$$\mathbf{F}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1-v) \\ uv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ \frac{y}{x+y} \end{pmatrix},$$

má jakobián $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$. Podle věty o substituci [14,81] je

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \Gamma(q) &= \iint_{(0, \infty) \times (0, \infty)} e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1} dx dy = \iint_G e^{-u} [u(1-v)]^{p-1} [uv]^{q-1} |J| du dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-u} u^{p-1} u^{q-1} u \cdot (1-v)^{p-1} v^{q-1} du dv = \int_0^\infty \int_0^1 e^{-u} u^{p+q-1} \cdot (1-v)^{p-1} v^{q-1} du dv. \end{aligned}$$

Podle Fubiniho věty je poslední integrál roven

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{p+q-1} du \int_0^1 (1-v)^{p-1} v^{q-1} dv = \Gamma(p+q) B(q, p).$$

Tedy
$$B(q, p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(p, q).$$

•

Funkce beta je vhodná pro aplikace ve statistice, kde je jasné, že náhodná proměnná je spojitá a nabývá hodnot z nějakého konečného intervalu. Mezi takové veličiny patří pevnost materiálu, pevnost vláken, drátů a lan, výška nebo obvod kmene stromů vysázených prakticky současně na lesním pozemku, spotřeba energie, vody (obr. 3.15), nákupy, tržby, charakteristiky poruch uniformity pneumatik atd. Některé aplikace byly předvedeny v přednášce [12] a v další práci [87]. Tam se také říká, že normální rozdělení se používá obvykle neodůvodněně, bez ověřování a prostě jen proto, že je to obvyklé a matematika kolem něj je důkladně zpracována a zpřístupněna.

B-rozdělení (beta rozdělení) má distribuční funkci [87]

$$F(x, \mathbf{b}) = \frac{\Gamma(b_3 + b_4 + 2)}{\Gamma(b_3 + 1) \Gamma(b_4 + 1)} \int_0^{\frac{x-b_1}{b_2-b_1}} t^{b_3} (1-t)^{b_4} dt,$$

kde $\mathbf{b} = (x_{min}, x_{max}, a, b)^T$ je vektor parametrů. Ten se najde minimalizací následující funkce sestavené z vypočtených np_i a empirických n_i četností pro interval $[x_i, x_{i+1})$

$$X^2(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

genetickým algoritmem ($p_i = F(x_{i+1}, \mathbf{b}) - F(x_i, \mathbf{b})$) [12,87].

Stejně tak N-rozdělení (normální rozdělení) má distribuční funkci

$$F(x, \mathbf{b}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} b_2} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\left(\frac{t-b_1}{b_2\sqrt{2}}\right)^2\right) dt$$

a vektor parametrů se najde podobně.

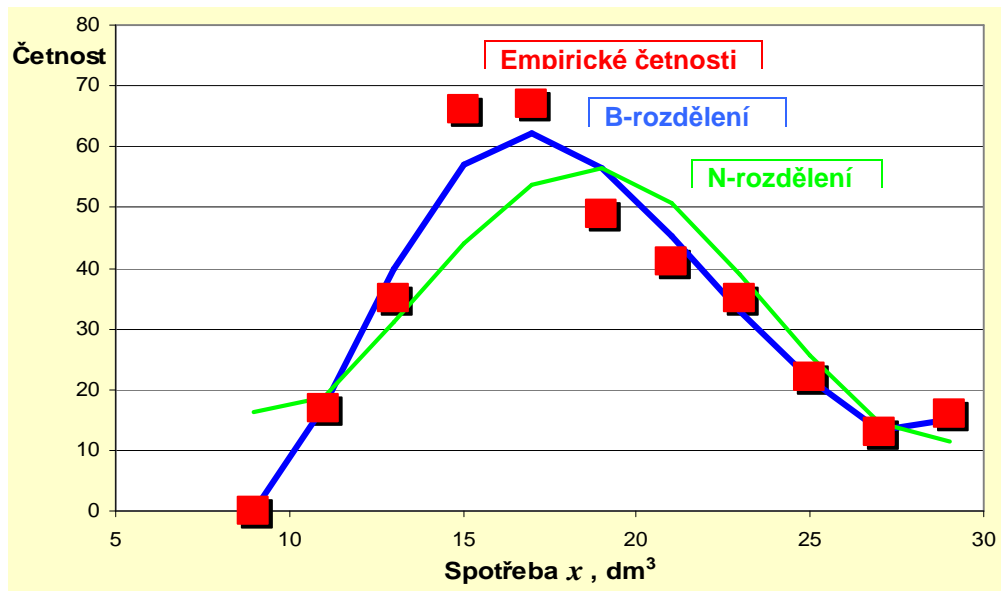
U příkladu z obr. 3.15 *nelze* B-rozdělení s vektorem parametrů $\mathbf{b} = (8.4, 64.26, 2.6875, 15.24876)^T$ na hladině významnosti 5% *zamítnout* [17], protože

$$X^2(\mathbf{b}) = 3.92540 < \chi_{0.05}(5) \approx 11.07050,$$

kdežto u normálního rozdělení s minimalizujícím vektorem $\mathbf{b} = (m, \sigma) = (18.59096, 5.05918)^T$ je

$$X^2(\mathbf{b}) = 29.43573 > \chi_{0.05}(7) \approx 14.06714,$$

takže normalita se *musí zamítnout*.



Obr. 3.15 – Distribuce denní spotřeby vody za 1 rok podle údajů na jednom vodoměru.

3.3.5. EULEROVA–MACLAURINOVA FORMULE

Vydeme z problému numerické integrace dostatečně hladké funkce f na intervalu $[a, b]$. Tento interval rozdělíme na n stejných intervalů délky $h = \frac{b-a}{n}$. Z numerické matematiky je dobře známa první aproximace integrálu pomocí spojitě po částech lineární funkce (splajnu) [3], tzv. trapezová (lichoběžníková) formule:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + f(b)]$$

Jedna idea zpřesnění výpočtu integrálu spočívá ve využití vyšších derivací funkce zapojených prostřednictvím Bernoulliho polynomů [80,81,89,90]. Zde uvedeme jen výslednou algoritmickou Eulerovu–Maclaurinovu formuli:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + f(b)] - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + R_m,$$

kde $2m$ je zvolený maximální stupeň Bernoulliho polynomů a R_m je zbytek

$$R_m = \frac{h^{2(m+1)}}{(2m+2)!} B_{2m+2} f^{(2m+2)}(a + \theta(b-a)), \quad 0 < \theta < 1.$$

K aplikaci Eulerovy–Maclaurinovy formule potřebujeme tedy jen Bernoulliho čísla a funkční hodnoty lichých derivací funkce f . O výpočtu Bernoulliho čísel jsme se zmínili už v odst. 3.3.2. Pro úplnost: $B_{2k+1} = 0$ pro $k > 0$. Další jsou v následující tabulce.

n	B_n
0	1
1	-1/2
2	1/6
4	-1/30
6	1/42
8	-1/30
10	5/6
12	-691/2730
14	7/6
16	-3617/510
18	43867/798
20	-177611/330
22	854513/138

První Bernoulliho čísla

Příklad 1. Odhadněme integrál $I = \int_0^2 \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$. Zvolme $n =$

4, tj. $h = 0.5$. Funkční hodnoty a hodnoty 1., 3. a 5. derivace jsou:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f'''(x)$	$f^{(5)}(x)$
0	1	0	0	0
0.5	0.882496903			
1	0.60653066			
1.5	0.324652467			
2	0.135335283	-0.270670566	-0.812011699	1.894693965
Členy	1.190673836	0.00563897	-7.04871E-05	-9.78988E-07
Aprox. A	1.190673836	1.196312806	1.196242319	1.19624134

Podle Eulerovy-Maclaurinovy formule vychází $A_5 = 1.19624$, ale z hodnot pravděpodobnostního (Laplaceova) integrálu (EXCEL) vychází $I = (2\pi)^{1/2} [\Phi(2) - \Phi(0)] = 1.1962880$. Ani další aproximace nenaznačují zlepšení. To je výzva k opatrnosti [90].

Příklad 2. Pro řadu $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$ se analytické vyjádření (na rozdíl od $\zeta(2k) = c_{2k} \pi^{2k}$

pro sudé argumenty ζ) dosud nepodařilo najít. Určit hodnotu $\zeta(3) = 1.202056903159\dots$ numericky však nečiní potíže, neboť tato řada konverguje dost rychle.

Eulerovu-Maclaurinovu formuli lze upravit pro výpočty odhadů součtů řad

$$\sum_{k=1}^n f(a+kh) = \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] + \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + R_m,$$

U konvergentní řady musí funkce f spolu s derivacemi vymizet při $x \rightarrow \infty$.

U řady $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$ položíme $f(x) = x^{-3}$, $h = 1$, $b = \infty$ takže $f^{(j)}(\infty) = 0$. Dejme tomu, že vypočteme součet prvních 4 členů $S_4 = \sum_{k=1}^4 k^{-3} = 1.177662037$. Pro zbytek řady pak dostaneme odhad

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(5+k)^3} &\approx \int_5^{\infty} f(x) dx + \frac{f(5)}{2} - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} f^{(2k-1)}(5) \\ &= \frac{1}{2 \times 25} + \frac{1}{2 \times 125} - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} f^{(2k-1)}(5). \\ &= 0.024 - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} f^{(2k-1)}(5). \end{aligned}$$

Derivace funkce x^{-3} se počítají snadno:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f^{(1)}(x) = -3x^{-4} = -(2+1)f(x)x^{-1}, \\ f''(x) &= f^{(2)}(x) = -(2+2)f^{(1)}(x)x^{-1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$f^{(k+1)}(x) = -(2+k+1)f^{(k)}(x)x^{-1}$$

a Bernoulliho čísla jsou v předchozí tabulce, takže výpočty $\frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} f^{(2k-1)}(5)$ lze

pohodlně udělat v EXCELU. Následuje tabulka výsledků s použitím indexů j a k .

V posledním sloupci jsou odhady $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} = 1.177662037 + 0.024 - \sum_{k=1}^m a_{2k}$.

j	$f^{(j)}(5)$	$B_{2k}/(2k)!$	a_k	Odhad
0	0.008			
1	-0.0048			
2	0.00384	0.083333333	-0.0004	1.202062037
3	-0.00384			
4	0.004608	-0.001388889	5.33333E-06	1.202056704
5	-0.0064512			
6	0.01032192	3.30688E-05	-2.13333E-07	1.202056917
7	-0.018579456			
8		-8.2672E-07	1.536E-08	1.202056902

Je vidět, že při troše štěstí dostaneme dobré odhady. Není ale jisté, že odhady konvergují, a je zklamáním, když se po vynaložení úsilí na výpočty zjistí, že sčítanci a_k konvergují k nule pomalu nebo se od ní začínají vzdalovat [90]. Na dnešní vkus nám takové výpočty připadají poněkud neurčité nebo složité. Nicméně Eulerova-Maclaurinova metoda stále patří mezi jednu z metod sčítání velkého počtu sčítanců jednotného typu (např. 100 pátých mocnin po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti čísel) nebo nekonečných řad.

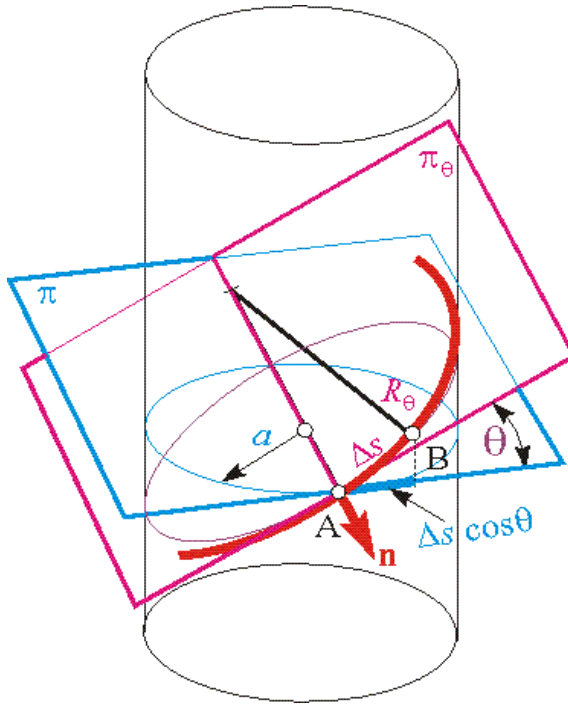
3.4. DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE

Sám název naznačuje, že jde o přechod od konečných objektů běžné geometrie k manipulaci s nekonečně malými objekty uskutečněný pomocí diferenciálního počtu [14,16,91]. Je pochopitelné, že o geometrických aplikacích infinitesimálních metod uvažovali už matematici před Eulerem. Např. 1731 vyšla kniha A. C. Clairauta o křivkách s dvojí křivostí, tj. prostorových křivkách.

Euler přešel k analýze ploch, tj. spojitého, popř. hladkého, zobrazení rovinné oblasti (intervalu) do prostoru: $(u, v) = \mathbf{u} \mathbf{a} \mathbf{x} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Křivost plochy se váže s křivkami na hladké ploše. Křivky vyřáté rovinami procházejícími společnou normálou v bodě plochy obecně mění křivost κ v tomto bodě. Ta nabývá maxima a minima ve dvou vzájemně ortogonálních normálových rovinách, které v tečné rovině k ploše určují tzv. hlavní směry. To bývá u některých ploch, např. rotačních, zřejmé. *Eulerovou větou* v diferenciální geometrii se rozumí tvrzení vyjádřené rovností

$$\kappa(\theta) = \kappa_{\max} \cos^2 \theta + \kappa_{\min} \sin^2 \theta ,$$

kde θ je úhel zvolené normálové roviny s normálovou rovinou příslušnou maximální křivosti.



Obr. 3.16 – Křivka na válcové ploše.

V diferenciální geometrii (např. [91,92]) se Eulerova věta dokazuje na základě 1. a 2. kvadratické formy plochy. Zde se omezíme jen na vysvětlení.

Obr. 3.16 ukazuje pro jednoduchost křivku na válcové ploše. Poloměr kruhové podstavy je a . Na ploše je zvolen bod A a jím je určena normála \mathbf{n} a normálová rovina π , která protíná válcovou plochu v kružnici o poloměru a . Ta je zároveň křivkou na válcové ploše s maximální křivostí ($1/a$). Tečnou a normálou v bodě A je určena rovina π_θ , která svírá s rovinou π úhel θ . Rovina π_θ protíná válcovou plochu v elipse s poloosami $a/\cos \theta$ a a . Tato elipsa aproximuje křivku v okolí bodu A a jak

známo, její poloměr křivosti v tomto bodě je

$$R_\theta = \frac{\left(\frac{a}{\cos \theta}\right)^2}{a} = \frac{a}{\cos^2 \theta}.$$

To je zároveň poloměr křivosti osculační kružnice křivky v bodě A. Platí tedy

$$\kappa_\theta = \frac{1}{R_\theta} = \frac{\cos^2 \theta}{a} = \kappa_{max} \cos^2 \theta.$$

U válcové plochy je minimální křivost (křivost povrchových přímek) $\kappa_{min} = 0$ a tedy Eulerova rovnice platí.

V obecném případě bychom museli dokázat, že směry maximální a minimální křivosti v bodě jsou ortogonální a pak použít křivosti osculačních kružnic.

V Eulerově době byla diferenciální geometrie spojena s vyšetřováním hladkých ploch ve 3D typu $z = f(x, y)$, kde f má derivace dostatečně vysokého řádu. Obecná geometrická témata se teprve začínala formovat a až po několika dalších desetiletích mohly vzniknout autonomní disciplíny geometrie s vlastními metodami a aparátem.

3.5. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

V diferenciální geometrii jsou vztahy mezi veličinami vyjádřeny diferenciálními rovnicemi a je jasné, že mnoho diferenciálních rovnic má geometrický nebo fyzikální původ. Téma diferenciálních rovnic omezíme jen na některé Eulerovy příspěvky.

Eulerova diferenciální rovnice má tvar

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0,$$

kde x je nezávisle proměnná, y je hledaná funkce x . Je to speciální případ obyčejné lineární diferenciální rovnice, která se substitucí $x = e^t$ dá převést na rovnici s konstantními koeficienty [93,94].

Příklad. Rovnice

$$x^2 y'' + 2x y' + y = 0$$

přejde substitucí $x = e^t$

$$\left[y' = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \right.$$

$$\left. y'' = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = e^{-t} \left(-e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right]$$

do tvaru

$$e^{2t} e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + 2 e^t e^{-t} \frac{dy}{dt} + y = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2 \frac{dy}{dt} + y = \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Poslední rovnice je lineární s konstantními koeficienty. Její řešení y jako funkce t se najde standardním způsobem (pomocí charakteristické rovnice [93,94]). Pak se inverzní substitucí $t = \ln x$ najde řešení $y(x)$.

V našem případě má charakteristická rovnice $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ komplexní kořeny $\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$.

Obecné řešení diferenciální rovnice s nezávisle proměnnou t je

$$y(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}, \text{ kde } A_1 = A_{11} + i A_{12}, A_2 = A_{21} + i A_{22} \text{ a všechna } A_{jk}, i, j = 1, 2 \text{ jsou reálná.}$$

Odtud reálné řešení původní Eulerovy rovnice jako funkce x ($x = e^t$, tj. $t = \ln x$)

$$\begin{aligned} y(x) &= \operatorname{Re}\{(A_{11} + i A_{12}) e^{\alpha_1 \ln x} + (A_{21} + i A_{22}) e^{\alpha_2 \ln x}\} \\ &= \operatorname{Re}\{(A_{11} + i A_{12}) \exp(-\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \ln x) + (A_{21} + i A_{22}) \exp(-\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \ln x)\} \\ &= \operatorname{Re}\{(A_{11} + i A_{12}) \exp(-\frac{1}{2} \ln x) \exp(i \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + (A_{21} + i A_{22}) \exp(-\frac{1}{2} \ln x) \exp(-i \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Re}\{(A_{11} + i A_{12}) (\cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + i \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)) + (A_{21} + i A_{22}) (\cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) - i \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x))\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} [(A_{11} + A_{21}) \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + (A_{22} - i A_{12}) \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} [C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x)]. \end{aligned}$$

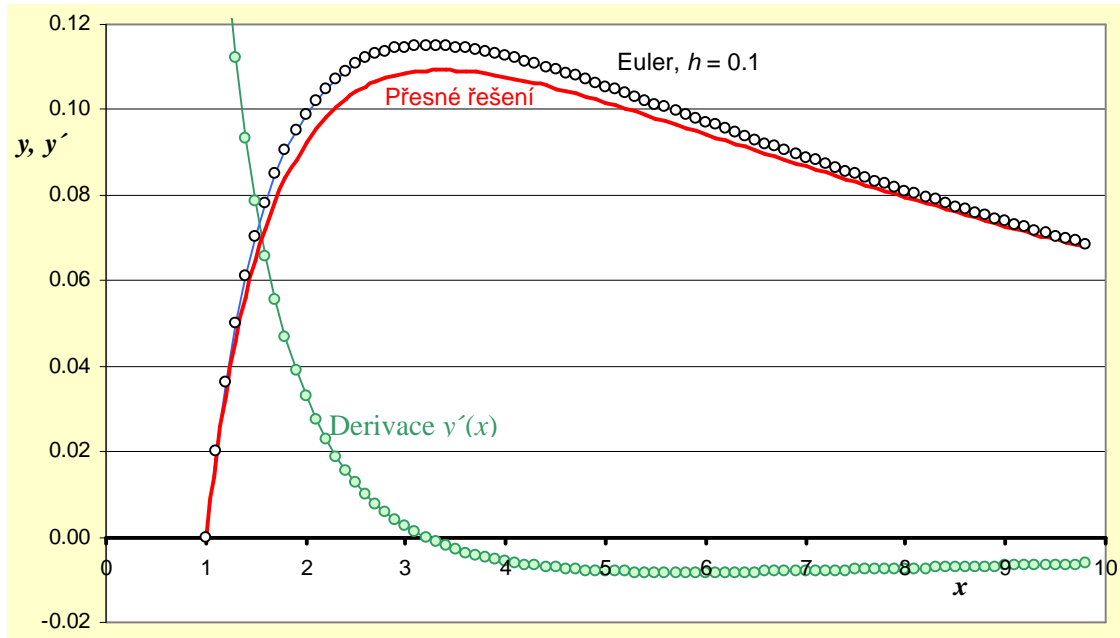
•

Tento příklad naznačuje, že řešení diferenciálních rovnic může být pracné a při dlouhém počítání se riziko výskytu chyby samozřejmě zvyšuje. Proto se už od dávných dob používalo různých odhadů a přibližných metod řešení. Dnes je k dispozici mnoho algoritmů pro numerické řešení obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic na počítači [3,89,90,95]. Jejich výklad obvykle začíná nejjednodušší *Eulerovou metodou* konečných diferencí (viz dále *Postup*), popř. jejími modifikacemi.

Obr. 3.17 ukazuje řešení diferenciální rovnice

$$x^2 y'' + 2x y' + y = 0$$

s počátečními podmínkami $y(1) = 0$, $y'(1) = 0.2$ a přibližné řešení získané Eulerovou metodou s krokem $h = 0.1$.



Obr. 3.17 – Srovnání přibližného řešení Eulerovou metodou s hrubým krokem $h = 0.1$ s přesným řešením.

Postup. Rovnice 2. řádu se nahradí vektorovou rovnicí (systémem dvou rovnic 1. řádu)

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\left(\frac{2y_2}{x} + \frac{y_1}{x^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, \mathbf{y}) \\ f_2(x, \mathbf{y}) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$$

a iterace s krokem $h = x_{i+1} - x_i$, $y_i = y(x_i)$ atd. je vyjádřena rovností $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i) h$, tj. ve složkách

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ y_{i+1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i + y_i' h \\ y_i' + f_2(x_i, y_i, y_i') h \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} y_{1,i+1} \\ y_{2,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,i} + y_{2,i} h \\ y_{2,i} - \left(\frac{2y_{2,i}}{x_i} + \frac{y_{1,i}}{x_i^2}\right) h \end{pmatrix}.$$

Přibližné řešení s krokem $h = 0.01$ je už graficky nerozlišitelné od přesného řešení. Přesné řešení se získá z počátečních podmínek a obecného řešení

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right],$$

tedy pro $C_1 = 0$ a $C_2 = 0.2/\sqrt{3}$.

Eulerova metoda obvykle poskytuje první hrubou informaci o řešení a má tedy spíš kvalitativní charakter. Jak již bylo řečeno, v praxi se obvykle pro numerické řešení používají přesnější ale také složitější metody.

Eulerovi se rovněž přisuzuje použití Taylorova rozvoje při řešení diferenciálních rovnic. Rozvoj řešení $y(x)$ v bodě x pro přírůstek h je

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x) \frac{h^2}{2!} + \dots$$

Máme-li zadánu diferenciální rovnici ve tvaru

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

můžeme jí využít k vyjádření vyšších derivací funkce y :

$$y''(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y(x)) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y(x)) y'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y(x)) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y(x)) f(x, y(x))$$

atd. Po dosazení do Taylorova rozvoje dostaneme

$$y(x+h) = y(x) + f(x, y(x))h + \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y(x)) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y(x)) f(x, y(x)) \right] \frac{h^2}{2!} + \dots$$

Aproximace prvního řádu (lineární iterace) s krokem h je již popsána Eulerova metoda.

Příklad. Počáteční úlohu

$$y' = 2xy^2, \quad y(0) = 1$$

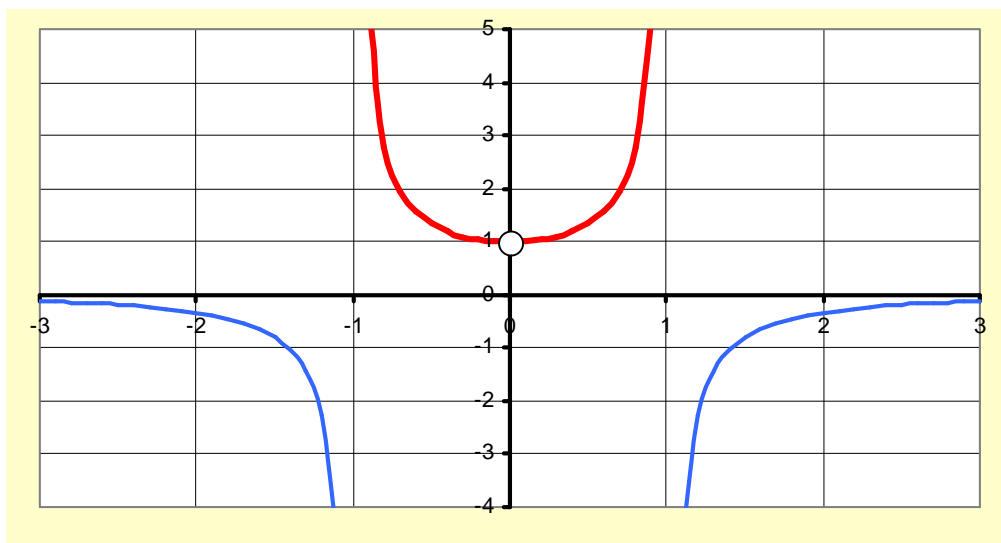
řešme nejprve analyticky. Protože $y'(0) = 0$, je bod $x = 0$ stacionárním bodem řešení y .

Za předpokladu $y(x) \neq 0$ lze rovnici převést do tvaru $\frac{y'}{y^2} = 2x$, který lze snadno

integrovat: $-\frac{1}{y} = x^2 + C$. Z počáteční podmínky dostaneme ihned $C = -1$ a tedy .

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(1+x)(1-x)}.$$

V bodech $x = \pm 1$ má řešení singularity. Tyto body vymezují definiční interval $(-1, 1)$ řešení počáteční úlohy jako diferencovatelné funkce (obr. 3.18).



Obr. 3.18 – Řešení počáteční úlohy $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$.

Řešme nyní naši počáteční úlohu na intervalu $[0, 0.8]$ pomocí 3 členů Taylorova rozvoje

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x) \frac{h^2}{2!}.$$

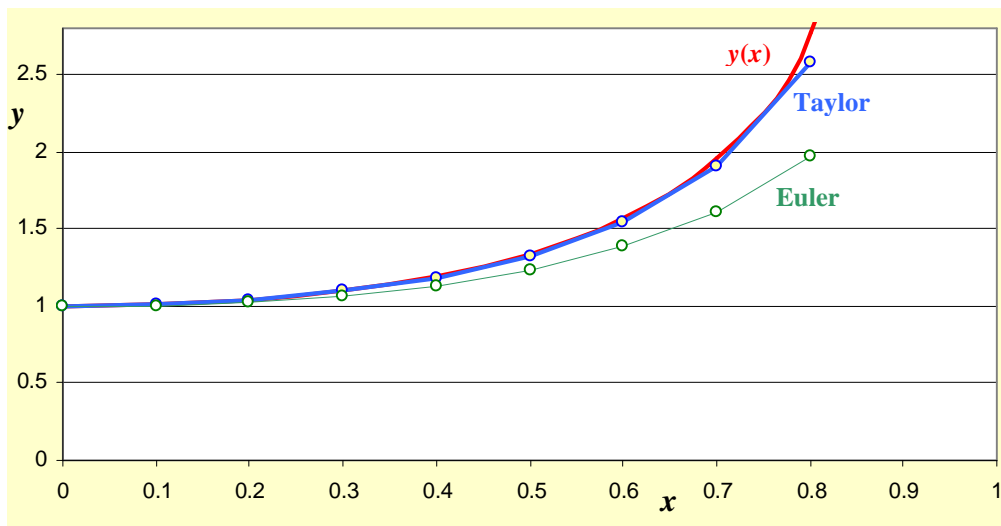
U naší rovnice je $y' = 2xy^2$ a $y'' = 2y^2 + 4xy y' = 2y^2 + 4xy \cdot 2xy^2 = 2y^2(1 + 4x^2y)$, tedy

$$y(x+h) = y(x) + 2xy^2 h + y^2(1 + 4x^2y) \frac{h^2}{2}.$$

Pro $y_k = y(x_k)$, $x_{k+1} = x_k + h = x_0 + kh$ pak dostáváme iteraci

$$y_{i+1} = y(x_i + h) = y_i + x_i y_i^2 h + y_i^2(1 + 2x_i^2 y_i) \frac{h^2}{2}.$$

S krokem $h = 0.1$ dostaneme v EXCELU body znázorněné na obr. 3.19. Je zřejmé, že i při tak velkém kroku h dává kvadratický Taylorův rozvoj už slušnou aproximaci řešení – mnohem lepší než lineární Taylorův rozvoj (základní Eulerova metoda).



Obr. 3.19 – Aproximace řešení počáteční úlohy na intervalu $[0, 0.8]$ Taylorovým rozvojem.

3. 6. VARIÁČNÍ POČET

Euler je považován za zakladatele variačního počtu. Variační úlohy byly známy už v antice [14,96] a mnoho úloh bylo také vyřešeno už před Eulerem. Např. řešení úlohy najít křivku dané délky, která uzavírá plochu maximálního obsahu, bylo známo už ve starém Řecku (Didó, izoperimetrický problém [14,96,97]) nebo úlohu Johanna Bernoulliho o brachistochroně, tj. křivce, po které se hmotný bod bez tření dostane v gravitačním poli do bodu s nižším potenciálem za nejkratší dobu ($\beta\rho\alpha\chi\sigma\tau\omicron\zeta$ = brachistos = nejkratší, $\chi\rho\nu\omicron\nu\zeta$ = chronos = čas) otištěnou v Leibnizově časopise Acta Eruditorum v červnu 1696, vyřešili už Leibniz, l'Hospital, Huygens, Newton, von Tschirnhaus a Jakob Bernoulli [98]. Jakob Bernoulli dokonce odvodil základní rovnici, kterou znovuobjevil Leonhard Euler [99]. Do této třídy patří také úloha o nalezení křivky, kterou zaujme osa lana, řetězu, těžkého vlákna zavěšeného mezi dvěma body. Tyto úlohy jsou spojovacím mostem mezi matematikou a mechanikou. Ale např.

Fermatův princip šíření světla v prostředí proměnné optické hustoty vede do optiky a daly by se uvést další příklady hledání složitějších extrémů v reálném světě.

Historické pozadí řešení brachistochrony bratry Bernoulliiovými a průvodní okolnosti jsou uvedeny v [100]. Pro přiblížení citace odtamtud:

Zadání v Acta Eruditorum:

Já, Johann Bernoulli, se obracím na nejskvělejší matematiky světa. Pro inteligentní lidi není nic přitažlivějšího než čestná výzva k řešení úlohy, jejíž vyřešení jim přinese slávu a zůstane jejich trvalou připomínkou. Následuje příklad Pascala, Fermata a dalších doufám, že se mi dostane vděčnosti celé vědecké komunity, když před nejskvělejší matematiky naší doby postavím problém, na kterém mohou odzkoušet své metody a sílu intelektu. Pokud mi někdo sdělí řešení předloženého problému, prohlásím veřejně, že zaslouhuje uznání.

Úloha:

Jsou dány dva body A a B ve vertikální rovině. Má se najít křivka, po níž se bod jen působením gravitace dostane z bodu A do bodu B v nejkratším čase.

...

Tak Johann Bernoulli a Leibniz záměrně pokoušeli Newtona. Nepřekvapuje proto, že v probíhající prioritní sporu o infinitesimálním počtu přidal Johann do své výzvy tato slova:

... existují jedinci, kterým se líbí řešit naše skvělé úlohy, ale mezi opravdovými matematiky je také pár těch, kteří se pyšní tím, jak obdivuhodně rozšířili hranice vědy svými zlatými teorémy; myslí si o nich, že je nikdo před nimi neznal, ale ve skutečnosti je jiní publikovali už dávno předtím.

...

Podle Newtonova životopisce Conduitta Newton problém brachistochrony vyřešil jednoho večera po návratu z královské mincovny.

... ve shonu kolem velké ražby nových mincí přišel Newton domů z Toweru až po 4. odpoledne velmi unaven, ale nespál, dokud úlohu nevyřešil, což bylo kolem 4. hodiny ráno.

Newton poslal své řešení Charlesi Montagueovi, hraběti z Halifaxu, ministru financí a zakladateli Bank of England. Montague byl Newtonův celoživotní přítel, nevlastní zeť a prezident Královské akademie. Newton prohlásil:

Nechci být obtěžován a provokován cizinci kvůli matematickým záležitostem...

...

Královská akademie otiskla Newtonovo sdělení ve Philosophical Transactions v lednu 1697 anonymně ...

Euler se snažil najít obecnou metodu nalezení extrémů matematických číselných objektů závislých na funkcích, tedy *funkcionálů*, jak říkáme dnes. Jeho odvození základní rovnice, která se teď nazývá *Eulerova* nebo *Eulerova-Lagrangeova*, nebylo

pochopitelně naprosto rigorózní v dnešním slova smyslu. Ale tato rovnice našla tolik aplikací v různých oblastech, že dala vznik nové matematické disciplině.

Ukážeme si principy odvození Eulerovy-Lagrangeovy rovnice.

Základní lemma variačního počtu [14].

Předpokládejme, že f a g jsou reálné spojité funkce na intervalu $[x_0, x_1]$, g je spojitě diferencovatelná a $g(x_0) = g(x_1) = 0$. Je-li $\int_{x_0}^{x_1} fg \, dx = 0$ pro každou takovou funkci g , je

$f(x) = 0$ pro každé $x \in [x_0, x_1]$.

Další informace a důkaz je např. v [14].

Eulerova-Lagrangeova rovnice pro funkcionál $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x)) \, dx$.

Předpokládejme, že funkce y má tyto vlastnosti: nabývá daných hodnot v krajních bodech intervalu $[x_0, x_1]$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ a 'stacionarizuje' funkcionál J . Tím rozumíme, že pro funkce blízké y se J téměř nemění. Funkce y by se měla nazývat nějak jako 'stacionára', ale ujalo se pro ni označení extrémála. Buď U množina dostatečně hladkých funkcí u na intervalu $[x_0, x_1]$, které se anulují v krajních bodech, $u(x_0) = u(x_1) = 0$. Pro $u \in U$ definujme funkci F takto

$$F(t) = J[y + tu].$$

Přírůstek funkce $t u(x)$ je změna čili variace funkce y a někdy se označuje δy . Je-li y extrémálou neboli stacionárním bodem J , musí být $t = 0$ stacionárním bodem F , tedy $\delta J = F'(0) \, dt = 0$. Položme

$$w(x, t) = y(x) + t u(x).$$

Parciální derivace budeme stručně vyznačovat dolním indexem, např. $f_y = \partial f / \partial y$. Pak

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x, t) = w_x(x, t) = y' + tu', \quad \frac{\partial}{\partial t} w(x, t) = w_t(x, t) = u.$$

Proměnná t funguje v integrálu $F(t)$ jako parametr. Derivování podle t [14] dává

$$\begin{aligned} F'(0) &= \frac{d}{dt} J[y + tu] \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} J[w(x, t)] \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} f(x, w(x, t), w_x(x, t)) \, dx \Big|_{t=0} \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial w} f(x, w(x, t), w_x(x, t)) \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial w_x} f(x, w(x, t), w_x(x, t)) \frac{\partial w_x}{\partial t} \right]_{t=0} dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, y') u + \frac{\partial}{\partial y'} f(x, y, y') u' \right] dx. \end{aligned}$$

Z linearity integrálu plyne

$$F'(0) = \int_{x_0}^{x_1} f_y(x, y, y') u \, dx + \int_{x_0}^{x_1} f_{y'}(x, y, y') u' \, dx.$$

Druhý sčítanec na pravé straně integrujeme per partes

$$\int_{x_0}^{x_1} f_{y'}(x, y, y') u'(x) dx = f_{y'}(x, y, y') u(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') u(x) dx.$$

V důsledku podmínek $u(x_0) = u(x_1) = 0$ je první člen na pravé straně 0. Tedy

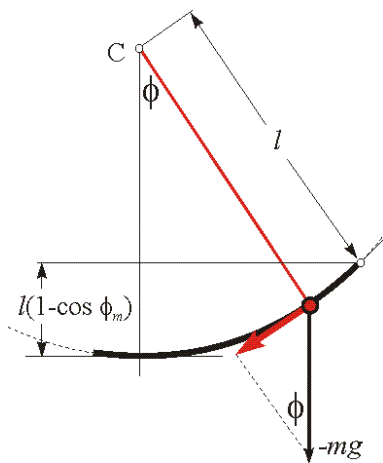
$$F'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') \right] u dx = 0.$$

Z volnosti volby u a ze základního lemmatu variačního počtu plyne, že výraz v hranaté závorce je roven 0. Pro stacionární bod funkcionálu J tedy platí

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, y') - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} f(x, y, y') \right) = 0.$$

Toto je *Eulerova-Lagrangeova rovnice* (Euler ji publikoval v roce 1744) a stala se základem odvětví, které Euler 1766 označil jako *variační počet*. Odvození základní rovnice zpřesnil a od geometrického nánosu očistil Joseph Louis Lagrange (1736–1813), který rovněž významně přispěl k rozvoji matematiky a jejích aplikací obzvláště v mechanice [101].

Matematické kyvadlo (obr. 3.20). Hmotný bod zavěšený na neprodužitelném vlákně



v gravitačním poli se zrychlením g vychýlíme do klidové polohy dané úhlem ϕ_m a pustíme jej. Rozdíl původní potenciální energie $mg(1 - \cos \phi_m)$ a nové potenciální energie v okamžiku t odpovídajícímu úhlu $\phi(t)$, tj. $mg(1 - \cos \phi) - mg(1 - \cos \phi_m) = mgl(\cos \phi_m - \cos \phi)$ se přemění v kinetickou energii $\frac{1}{2} m(l\dot{\phi})^2$ (tečka značí derivaci podle času) tak, že v průběhu pohybu se minimalizuje integrál rozdílu kinetické energie a změny potenciální energie

$$\int_0^t \left[\frac{1}{2} m(l\dot{\phi})^2 - mgl(\cos \phi_m - \cos \phi) \right] dt$$

Obr. 3.20 – Matematické kyvadlo.

$$= ml \int_0^t \left[\frac{1}{2} l\dot{\phi}^2 + g \cos \phi - g \cos \phi_m \right] dt.$$

Integrand na pravé straně označme $f(\phi, \dot{\phi})$. Příslušná Eulerova-Lagrangeova rovnice je

$$\frac{\partial}{\partial \phi} f(\phi, \dot{\phi}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} f(\phi, \dot{\phi}) \right) = -g \sin \phi - \frac{d}{dt} (l\dot{\phi}) = 0, \text{ tj.}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0.$$

Touto rovnicí jsme se zabývali v [16] a ukázali jsme, jak se s amplitudou ϕ_m zvětšuje doba kyvu. Aby doba kyvu byla nezávislá na amplitudě, musel by se hmotný bod pohybovat po izochroně, tautochroně či brachistochroně, což jsou synonyma cykloidy.

Brachistochrona. Počáteční bod umístíme do počátku souřadného systému ve vertikální rovině, přičemž vertikální osa Oy míří dolů. Potenciální energie $U(y) = -mgy$ tedy klesá z nulové úrovně v počátku. Ze zákona zachování energie plyne, že úbytek potenciální energie je roven získané kinetické energii, $-mgy + mv^2/2 = 0$. Odtud

$$v = ds/dt = \sqrt{1 + y'^2} dx/dt = \sqrt{2gy}.$$

Čas poklesu je pak

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

a jeho minimalizace znamená minimalizaci funkcionálu $\int_0^x \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx = \int_0^x f(y, y') dx$.

Integrand explicitně nezávisí na x a v tomto případě má Eulerova rovnice integrál [14,96] $f - y'f_{y'} = \text{const.}$, tedy

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y' y'}{\sqrt{y} \sqrt{1 + y'^2}} = C.$$

Násobení poslední rovnice faktorem $\sqrt{y} \sqrt{1 + y'^2}$ dává rovnici $C \sqrt{y} \sqrt{1 + y'^2} = 1$, tj.

$$y(1 + y'^2) = 1/C^2 = B, \quad C \neq 0.$$

Odtud

$$y' = \sqrt{\frac{B - y}{y}},$$

což se dá snadno integrovat

$$\int_0^y \sqrt{\frac{y}{B - y}} dy = \int_0^x dx = x.$$

Zavedení nové proměnné $u = u(y) = \sqrt{\frac{y}{B - y}}$ vede zpětně k $y(u) = B u^2 / (1 + u^2)$, tedy

$dy = B 2u / (1 + u^2)^2 du$ a

$$\begin{aligned} x &= \int_0^y \sqrt{\frac{y}{B - y}} dy = B \int_{u(0)}^{u(y)} u \cdot \frac{2u}{(1 + u^2)^2} du = B \left[u \frac{-1}{1 + u^2} \Big|_0^{u(y)} + \int_0^{u(y)} \frac{du}{1 + u^2} \right] \\ &= B \left[\frac{-u(y)}{1 + u^2(y)} + \arctan u(y) \right]. \end{aligned}$$

Abychom se funkce \arctan zbavili, zavedeme úhel ϕ rovností $u(y) = \tan \phi$. Pak

$$x = B \left[\phi - \frac{\tan \phi}{1 + \tan^2 \phi} \right] = B \left[\phi - \sin \phi \cos \phi \right] = B \left[\phi - \frac{1}{2} \sin (2\phi) \right] = \frac{B}{2} [2\phi - \sin (2\phi)]$$

a konečně

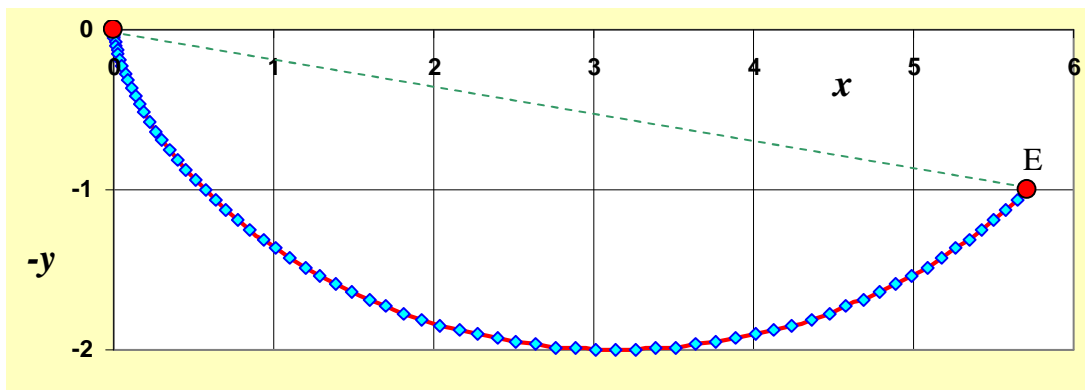
$$y = B u^2 / (1 + u^2) = B \tan^2 \phi / (1 + \tan^2 \phi) = B \sin^2 \phi = \frac{B}{2} [1 - \cos (2\phi)].$$

Ted' stačí položit $p = 2\phi$ a dostaneme parametrické vyjádření hledané extrémály

$$x(p) = a (p - \sin p), \quad y(p) = a (1 - \cos p).$$

Získaná rovinná křivka se nazývá cykloida. Je to trajektorie bodu na kružnici o poloměru a při odvalování kružnice po horizontální ose $0x$.

Největší počáteční zrychlení lze získat při pohybu ve směru vertikály, tj. osy $0y$, od něhož se dráha hmotného bodu musí postupně horizontálně odklánět. Ilustrativní příklad je na obr. 3.21. V silovém poli se zrychlením $g = 9.8 \text{ms}^{-2}$ je čas potřebný k uražení dráhy po cykloidě $t = 1.5046 \text{s}$, pohyb po přímce $\overline{0E}$ by vyžadoval čas $t = 2.6198 \text{s}$ [14].



Obr. 3.21 – Oblouk cykloidy jako brachistochrona mezi počátkem a bodem $E = (3\pi/2+1, 1)$.

Variační úlohy se dají rozšířit na funkcionály s derivacemi vyšších řádů, s více proměnnými atd. [14,96]. Další důležitou třídou jsou podmíněné úlohy, které v diferenciálním počtu i ve variačním počtu rozpracoval J. L. Lagrange. Tyto úlohy se řeší zavedením Lagrangeova multiplikátoru [14,96].

Např. zmíněná úloha maximální plochy omezené křivkou dané délkou L zní

$$\left(\int_a^b y dx \mid \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx - L = 0 \right) \longrightarrow \max.$$

Vytvoříme pomocnou funkci F s konstantním multiplikátorem λ : $F = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$.

Pro ni Eulerova rovnice zní

$$1 - \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 1 - \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 1 - \lambda \kappa = 0,$$

kde $\kappa = 1/\lambda = \text{const.}$ je křivost. Řešením je tedy křivka s konstantní křivostí, kružnice.

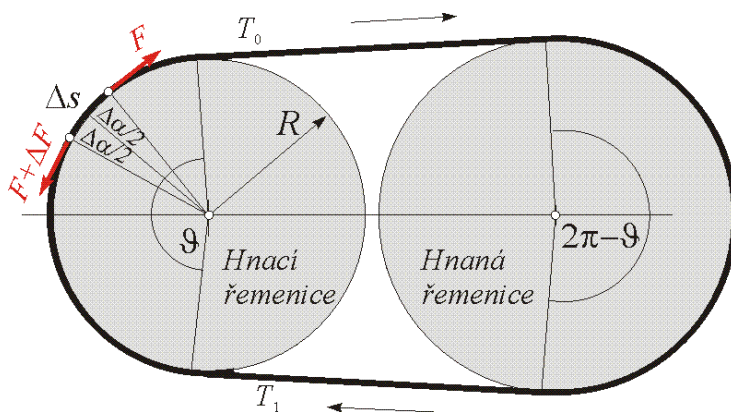
Technicky důležité je řešení objemové izoperimetrické úlohy [102].



4. EULEROVY STOPY VE FYZICE

Euler se od ranného mládí zajímal o aplikace matematiky v mechanice a technice. Jak je uvedeno ve 2. kapitole, ve 20 letech zaslal do soutěže o Velkou cenu Pařížské akademie práci o nejlepším umístění stožárů na plachetnici, zajímal se o stavbu lodí, dělostřelectví, pohyb nebeských těles, zejména Měsíce (jako řešení problému tří těles), proudění tekutin, mechaniku a mechanické stroje. V roce 1736 vydal knihu *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*, v níž byl pohyb hmotného bodu popsán ryze analytickými prostředky, v roce 1765 vyšla jeho kniha o pohybu tuhého tělesa, *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* [5]. Mnohé z jeho prací si netroufám vůbec komentovat, proto uvedu spíš namátkou jen některé.

4.1. ŘEMENOVÝ POHON



Obr. 4.1 – Řemenový pohon: kolo vlevo hnací, vpravo hnané.

Normálová složka síly F_N je součtem tahu v koncových bodech elementu délky Δs (obr. 4.1). Přírůstek tahové síly ΔF je roven normálové přítláčivé síle

$$\begin{aligned} F_N &= F \sin(\Delta\alpha/2) \\ &\quad + (F + \Delta F) \sin(\Delta\alpha/2) \\ &\approx F \Delta\alpha \end{aligned}$$

násobené koeficientem tření μ , tj.

$$\Delta F = \mu F_N = \mu F \Delta\alpha, .$$

resp. v infinitesimálním tvaru

$$\frac{dF}{d\alpha} = \mu F.$$

Integrací této jednoduché lineární rovnice doplněné počáteční podmínkou $F(0) = T_0$

(obr. 4.1) dostaneme $\int_{T_0}^{T_1} \frac{dF}{F} = \mu \int_0^{\vartheta} d\alpha$, tedy $\ln \frac{T_1}{T_0} = \mu\vartheta$: Pro maximální přenášenou

sílu pak platí *Eulerův vztah*

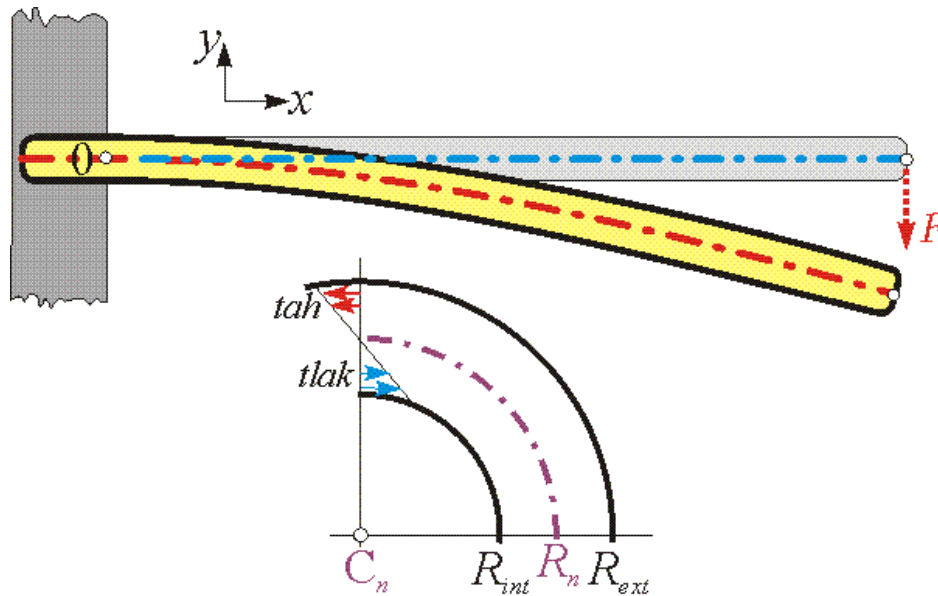
$$T_1 - T_0 = T(\vartheta) - T_0 = T_0 (e^{\mu\vartheta} - 1).$$

Úhel ϑ značí při stejném koeficientu tření úhel opásání menší řemenice s poloměrem R ($\vartheta < \pi$). Maximální přenášený moment je $M = (T(\vartheta) - T(0)) R$ a maximální přenášený výkon $P = 2\pi (T(\vartheta) - T(0)) R n$, kde n je počet otáček hnací řemenice za sekundu.

4.2. OHYB NOSNÍKU

Každému, kdo má aspoň základní zkušenosti s reálnými materiály, je jasné, že teorie lineární elasticity je především idealizace. Z idealizovaných předpokladů plynou jako matematické důsledky užitečné odhady. Ty však s množstvím různých speciálních případů a praktických korekcí dělají nauku o pružnosti postrachem studentů.

Jedním ze základních aplikačních problémů je ohyb nosníků. Důkladná teorie je vyložena v knize [31]. Jádrem problému znázorňuje obr. 4.2, na němž je schéma ohybu horizontálního vetknutého nosníku s konstantním průřezem v příčném směru.



Obr. 4.2 – Schéma zatížení nosníku. Dole je znázornění deformace pomocí poloměrů křivosti.

Zatížení vertikální silou \mathbf{F} vyvolává moment \mathbf{M} ($= \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, kde \mathbf{r} je polohový vektor působíště síly \mathbf{F} v referenční soustavě s počátkem 0 a \times značí vektorový součin), který je v rovnováze s momentem napětí na ploše průřezu A. Budeme předpokládat, že

- (i) existuje neutrální plocha či vlákno, na němž je napětí σ ve směru osy nosníku nulové,
- (ii) všechny složky napětí kromě těch, které působí podél neutrální osy nosníku, jsou zanedbatelné,
- (iii) příčný rovinný řez před deformací zůstává rovinným i po deformaci (Daniel Bernoulli),
- (iv) platí Hookův zákon $\sigma = E\varepsilon$, kde E je Youngův modul pružnosti materiálu nosníku (Robert Hooke, 1635–1703 [103], Thomas Young, 1773–1829 [104]).

Dolní část obr. 4.2 ukazuje, že deformace je dána polohou bodu vzhledem k neutrální ploše. Zvolíme-li bod na neutrálním vláknu jakožto rovinné křivce, přísluší mu poloměr křivosti R_n a střed křivosti C_n . Je-li R vzdálenost bodu nosníku v rovině neutrálního

vlákna od středu křivosti C_n , odpovídá mu poměrná deformace $\varepsilon(R) = (R - R_n)/R_n$. Položíme-li $x = R - R_n$, dostaneme poměrnou deformaci $\varepsilon(x) = x/R_n$, a napětí

$$\sigma(x) = E \frac{x}{R_n},$$

kde E je Youngův modul pružnosti. Pro rovnováhu momentů síly a napětí musí platit

$$M = |\mathbf{M}| = \iint_{(A)} x \sigma(x) dA = \frac{E}{R_n} \iint_{(A)} x^2 dA.$$

Integrál na pravé straně, $J = \iint_{(A)} x^2 dA$, je moment setrvačnosti průřezu vzhledem k ose

kolmé na podélnou osu nosníku a ležící na neutrální ploše v uvažovaném bodě.

Tak jsme dospěli ke známému *Bernoulliho–Eulerovu vztahu*

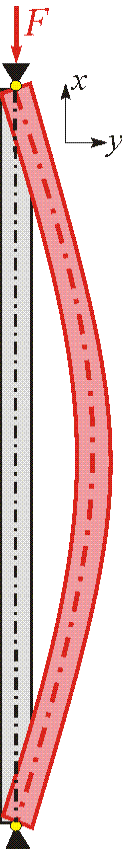
$$M = \frac{EJ}{R_n}.$$

Poznámka. Euler používal lineární aproximaci a konstantu E už 1727, tedy 80 let před T. Youngem [104].

4.3. VZPĚR. EULEROVO KRITICKÉ ZATÍŽENÍ

Křivost κ neutrálního vlákna jako rovinné křivky $y(x)$ je definována takto [14]:

$$\kappa(x) = \frac{y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}}.$$



Moment vertikální síly vzhledem k dolnímu opěrnému bodu je

$$M = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = -Fy.$$

Pro malé výchylky y od vertikály lze křivost aproximovat $y''(x)$. Po dosazení do Bernoulliho-Eulerova vztahu dostaneme lineární diferenciální rovnici

$$-Fy = EJ y'', \text{ resp.}$$

$$y'' + \frac{F}{EJ} y = 0.$$

Na obr. 4.3 je kloubové uložení konců pružného nosníku (prutu) vyjádřené okrajovými podmínkami

$$y(0) = y(L) = 0,$$

kde L je délka nosníku. Řešením této okrajové úlohy je část sinusovky

$$y(x) = y_{\max} \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EJ}} x\right)$$

s celistvým počtem půlvln na délce L , tj. $\sqrt{\frac{F}{EJ}} x = k\pi$, $k = 1, 2, \dots$

Vzpěrná stabilita nosníku se naruší, bude-li $F \geq F_{\text{crit}} = \frac{EJ}{L^2} \pi^2$ ($k = 1$).

Zatížení F_{crit} je tzv. *Eulerovo kritické zatížení*.

Řešení pro $k > 1$ jsou energeticky náročnější, proto se běžně nerealizují.

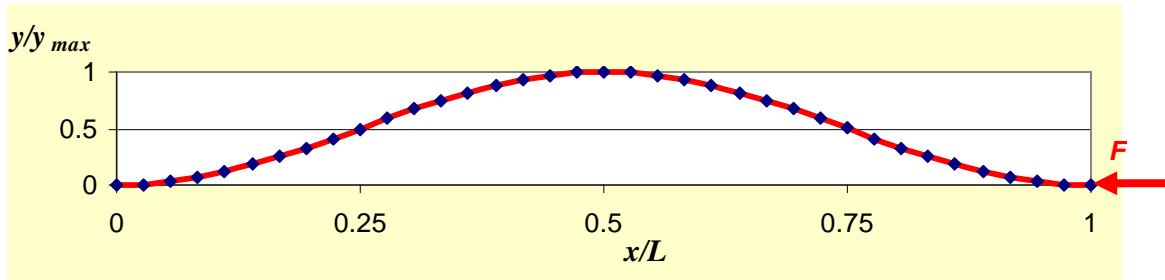
Obr. 4.3 – Vzpěr.

Kritické zatížení závisí na okrajových podmínkách. Budou-li oba konce vertikálního nosníku vetknuté, bude to vyjádřeno rovnostmi

$$y(0) = y(L), \quad y'(0) = y'(L) = 0.$$

Snadno uhadneme (obr. 4.4), že příslušné řešení ohybové rovnice můžeme psát takto:

$$y(x) = \frac{y_{max}}{2} \left[\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EJ}} x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right]$$



Obr. 4.4. – Tvar nosníku namáhaného na vzpěr s oběma vetknutými konci.

Eulerovo kritické zatížení vyjde z okrajové podmínky $\sqrt{\frac{F}{EJ}} L = 2\pi$: $F_{crit} = \frac{EJ}{L^2} 4\pi^2$.

U obou vetknutých konců je tedy kritické zatížení 4× vyšší než u kloubově uložených konců nosníku.

U jednoho vetknutého konce a druhého volného konce odpovídá tvar vychýleného nosníku intervalu délky $0.25L$ na obr. 4.4. Kritické zatížení je pak $F_{crit} = \frac{EJ}{4L^2} \pi^2$.

Podobně lze zvládnout další případy vzpěru a upevnění nosníku [105].

Poznámka. Správně bychom měli řešit ohyb pomocí křivosti, tedy nelineární diferenciální rovnice 2. řádu. K tomu je nutné mít k dispozici vhodnou numerickou metodu řešení diferenciálních rovnic a počítač [3]. To by mohlo být zajímavé téma pro aplikace nauky o pružnosti u zkoumaného materiálu nebo pro specialisty v tomto oboru.

4.4. MAUPERTUISŮV – EULERŮV PRINCIP

Od Descartesovy, Galileiho, Huygensovy fyziky modelů přešel Newton k fyzice principů a jeho základní kniha nesla název Philosophiae naturalis principia mathematica (Matematické principy fyziky). Šlo o objasnění, zda přírodní děje probíhají jednotným způsobem, např. tak, že se zachovává energie a přitom se nějaká veličina minimalizuje.

Maupertuis definoval tuto veličinu jako součin rychlosti a dráhy, vs , a nazval ji akci. Podle jeho principu přírodní děje probíhají tak, že se akce minimalizuje. To je velmi obecná formulace. V infinitesimálním pojetí se dá tento princip převést do tvaru použitelnějšího v mechanice

$$\int v ds = \int v \cdot v dt \sim \frac{1}{2} \int v^2 dt = \frac{1}{m} \int E_{kin} dt \longrightarrow \min.$$

Historické pozadí ukazuje následující citace ze [106]:

Maupertuis byl první, kdo publikoval *princip nejmenší akce*, $\int v ds \rightarrow \min.$, přičemž integrál se uvažuje na množině všech spojnic (drah) dvou specifikovaných bodů prostoru. Použil jej jen u světla a nahradil jím Fermatův princip, z něž např. plyne Snellův zákon lomu světla.

Pár měsíců předtím, než vyšla Maupertuisova práce tiskem, Euler nezávisle definoval akci výrazem $S = \int mv ds = \int p dq$, kde p značí zobecněnou hybnost a q zobecněnou souřadnici. Princip nejmenší akce pak použil k popisu pohybu hmotného bodu (1744). Po dvou letech Maupertuis citoval Eulerovu práci “jako krásnou aplikaci jeho principu u pohybu planet“ a použil tento princip k řešení rovnováhy na páce, na analýzu rázu dokonale elastických a dokonale neelastických těles. Maupertuis věřil, že tento princip je obecně platný a Euler tento jeho myšlenkový skok intuitivně uskutečnil. Maupertuisovy závěry však nebyly zcela konzistentní. V r. 1751 prioritu Maupertuisovu zpochybnil Johann Samuel König, který odkazoval na Leibnizův dopis z r. 1707, v němž byly popsány podobné výsledky jako ty, k nimž dospěl Euler. Avšak Maupertuis a další požadovali, aby König předložil originál Leibnizova dopisu. To ovšem nešlo – König měl jen kopii. Proto Berlínská akademie pod vedením Eulera prohlásila kopii Leibnizova dopisu za padělek a prezident akademie Maupertuis si mohl dál činit nárok na prioritu principu nejmenší akce. König ale nepřestal trvat na Leibnizově prioritě a brzy nato se do sporu vmísili další dva osvícenci: Voltaire na straně Königově a pruský král Friedrich II. na straně Maupertuisově [107]. Ale k žádné změně názorů nedošlo až do 20. století, kdy se skutečně našly další nezávislé kopie Leibnizova dopisu. V současnosti panuje shoda v tom, že priorita Leibnizova je oprávněná, tj. že Leibniz princip nejmenší akce formuloval a použil k řešení několika mechanických problémů před rokem 1707 (tedy 37 let před Maupertuisem a Eulerem), ale tyto své ideje nezveřejnil.

Podobný historický popis je také ve [107], kde se uvádí, že zmíněný Leibnizův dopis byl adresován Jakobu Hermannovi.

Podrobný výklad a komentáře k Maupertuisově–Eulerově principu je např. uveden v knihách [27,29,30]. Zásluhou dalších generací fyziků se z něj transformacemi souřadnic a vyjádření energií odvodily snáze aplikovatelné integrální principy.

Z nich asi nejznámější je Hamiltonův (William Rowan Hamilton, 1805–1865). V něm je akce konzervativního systému, tj. zachovávajícího energii, definována jako časový integrál Lagrangeovy funkce, tj. rozdílu kinetické a potenciální energie,

$$L(t, \mathbf{q}(t), \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}) = E_{kin}(t, \mathbf{q}(t), \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}) - E_{pot}(t, \mathbf{q}(t), \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}).$$

Symbol $\mathbf{q}(t)$ značí vektor zobecněných nezávislých souřadnic.

Aplikaci tohoto princip ukážeme na jednoduchém příkladu fyzikálního kyvadla. Za jedinou složku vektoru zobecněných souřadnic \mathbf{q} vezmeme úhel ϕ mezi spojnicí bodu závěsu 0 s těžištěm kyvadla G a vertikálou (obr. 4.5). Úhlová rychlost je v celém tělese stejná, proto kinetická energie je

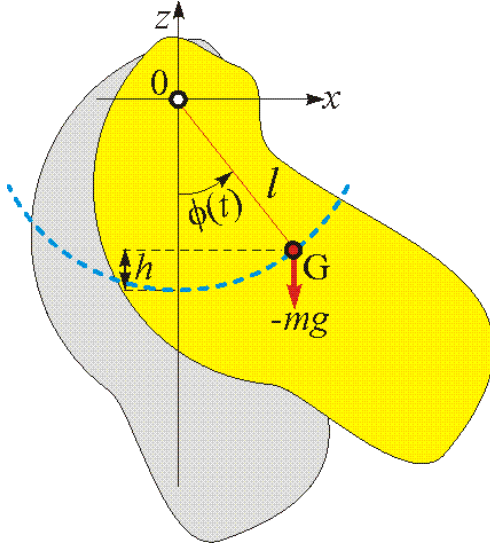
$$E_{kin}(t, \mathbf{q}(t), \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}) = E_{kin}(\frac{d\phi(t)}{dt}) = \frac{1}{2} \int_{(T)} (r(x, y, z) \frac{d\phi(t)}{dt})^2 dm(x, y, z),$$

kde (T) značí množinu všech bodů (x, y, z) tělesa kyvadla v kartézském souřadném systému s počátkem v bodě závěsu, $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ je vzdálenost bodu (x, y, z) od osy otáčení a $dm(x, y, z)$ element hmoty přiřazený bodu (x, y, z) . Zřejmě tedy

$$E_{kin}\left(\frac{d\phi(t)}{dt}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi(t)}{dt}\right)^2 \int r^2(x, y, z) dm(x, y, z). \quad (T)$$

Integrál na pravé straně se nazývá moment setrvačnosti vzhledem k horizontální ose otáčení procházející počátkem 0 (kolmo na osy x, z na obr. 4.5). Označíme jej J . Pak

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J \left(\frac{d\phi(t)}{dt}\right)^2.$$



Obr. 4.5 – Fyzické kyvadlo.

Potenciální energie je rovna práci tíže při přemístění těžiště G do výšky $h = l(1 - \cos \phi)$,

$$E_{pot}(\phi(t)) = mgh = mgl(1 - \cos \phi(t)),$$

Zachování energie vyžaduje otáčení kyvadla beze ztrát, tj. beze ztrát třením v závěsu a bez odporu vzduchu.

Lagrangeova funkce

$$L(\phi, \frac{d\phi(t)}{dt}) = \frac{1}{2} J \left(\frac{d\phi(t)}{dt}\right)^2 - mgl(1 - \cos \phi(t)).$$

Podle Hamiltonova principu funkce $\phi(t)$ je stacionárním bodem funkcionálu (akce)

$$S[\phi] = \int_{t_0}^{t_1} L(\phi, \frac{d\phi}{dt}) dt.$$

Jak už víme z odstavce 3.6, nutnou podmínkou pro stacionarizaci S při dostatečné diferencovatelnosti integrandu L je, aby hledaná funkce $\phi(t)$ splňovala příslušnou Eulerovu-Lagrangeovu rovnici

$$\frac{\partial}{\partial \phi} L(\phi, \frac{d\phi}{dt}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} L(\phi, \frac{d\phi}{dt}) \right) = 0.$$

Po dosazení za L dostaneme

$$-mgl \sin \phi - \frac{d}{dt} \left(J \frac{d\phi}{dt} \right) = -mgl \sin \phi - J \frac{d^2 \phi}{dt^2} = 0,$$

tj. známou diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \sin \phi = 0.$$

Definujeme-li *redukovanou délku* kyvadla rovností

$$l^* = \frac{J}{ml},$$

dostaneme rovnici odpovídajícího matematického kyvadla délky l^* :

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{g}{l^*} \sin \phi = 0.$$

Pro matematické kyvadlo délky l je hmota soustředěna do bodu na konci závěsu, takže moment setrvačnosti $J = ml^2$. Pak $l^* = \frac{ml^2}{ml} = l$.

Příklad. Ocelové pravítko má stupnici 500mm a délku o něco větší. Za stupnicí je v něm vyvrtán otvor pro zavěšení. Tloušťka 1mm a šířka 30mm je velmi malá proti dominantní délce pravítka, proto pravítko zredukujeme na úsečku délky $L = 520\text{mm}$ s délkovou hustotou m/L , kde m je hmotnost pravítka. Jak hned uvidíme, obejdeme se bez znalosti m . Vzdálenost těžiště od bodu závěsu byla $l = 258\text{mm}$. Pravítko jsme zavěsili a vychýlili tak, aby vykonávalo malé kmity. Dobu 10 kmitů jsme dělili 10 a tím jsme dostali doby uvedené v tabulce. Pro srovnání jsme na stejný závěs zavěsili tenkou polyesterovou nit a přibližně v délce pravítka jsme nit vložili mezi 2 kruhové magnety o průměru 18mm. Délka tohoto modelu matematického kyvadla byla $l_{mat} = 530\text{mm}$. Analogicky měřené periody jsou uvedeny v dalším sloupci tabulky.

Periody kmitů T_b , s	
Pravítko	Nit
1.184	1.467
1.220	1.479
1.169	1.452
$P = 1.191$	$P = 1.466$
$s = 0.026211$	$s = 0.013528$

Moment setrvačnosti pravítka vzhledem k bodu závěsu je

$$J = \frac{m}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{m}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{mL^2}{3}.$$

Redukovaná délka pravítkového kyvadla

$$l^* = \frac{mL^2}{3ml} = \frac{L^2}{3l} = \frac{520^2}{3 \times 258} = 349.35\text{mm} = 0.34935\text{m}.$$

Perioda kmitu kyvadla je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^*}{g}} = 1.186\text{s}.$$

Je patrné, že tato hodnota zapadá mezi změřenou maximální a minimální dobu kmitu.

Obecněji lze testovat platnost hypotézy $H_0: T = P$, kde P je změřená průměrná doba kmitu. Tolerance je určena veličinou $\Delta = t_\alpha(n-1) \sqrt{\frac{s}{n}}$, kde n je počet měření (rozsah výběru), s je výběrová směrodatná odchylka a t_α je kritická hodnota t -rozdělení na hladině významnosti α [84,85]. V našem případě $n = 3$, takže pro obvyklou hladinu významnosti $\alpha = 0.05$ je $t_\alpha(2) = 4.303$, $\Delta = 4.303 \frac{0.0262}{\sqrt{3}} = 0.065$ a zřejmě

$$P - \Delta = 1.126 < 1.186 < 1.256 = P + \Delta.$$

Hypotézu H_0 tedy nelze zamítnout.

Perioda modelu matematického kyvadla je

$$T_{mat} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{mat}}{g}} = 1.461\text{s}.$$

Zase zapadá mezi naměřené hodnoty a podobně jako u fyzického kyvadla by se prověřila hypotéza H_0 .

Zajímavější byly kmity pravítka položeného rovnovážně na horizontální ostří nože upevněného ve svěráku. Protože pravítko se tíží trochu prohnulo, leželo jeho těžiště pod bodem závěsu, takže jeho malé kmity byly stabilní. Nyní je moment setrvačnosti vzhledem k opěrnému bodu

$$J_G = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{m}{L} \frac{2L^3}{3 \times 8} = \frac{m}{3} \left(\frac{L}{2}\right)^2,$$

Průměrná doba kmitu byla $T_G = 10.739\text{s} = 2\pi \sqrt{\frac{l_G^*}{g}}$. Odtud redukovaná délka kyvadla $l_G^* = g [T_G/(2\pi)]^2 =$

28.628m . Na druhé straně $l_G^* = \frac{J_G}{m l_G} = \frac{1}{3l_G} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3l_G} 0.265^2$. Z rovnosti $28.628 = \frac{1}{3l_G} 0.265^2$

plyne přijatelný odhad vzdálenosti opěrného bodu od těžiště $l_G = \frac{0.265^2}{3 \times 28.628} = 0.0008177\text{m} = 0.818\text{mm}$.

Ještě zajímavější jsou kmity ocelového pravítka na válečku, ale jejich popis je složitější.

4.5. MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA

Tuhé těleso je idealizovaná aproximace reálných těles. Je to nedeformovatelný objekt s neměnnou, tuhou geometrií, tj. vzdálenost libovolných jeho dvou bodů se při pohybu nemění. Další idealizací je pojem hustoty, který se v kartézských souřadnicích obvykle definuje jako limita podílu hmoty obsažené v elementu objemu,

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V(x, y, z) \rightarrow 0^+} \frac{\Delta m(x, y, z)}{\Delta V(x, y, z)}.$$

Když však rozměry objemového elementu klesnou do subatomární velikosti, hmota se stane velmi řídkou sestavou částic rychle se měnící v čase. Takže v pevném časovém okamžiku a v závislosti na souřadnicích x, y, z je podíl na pravé straně hned obrovský a hned nulový, čili v matematickém smyslu tato limita neexistuje. Takže hustotu je třeba brát konvenčně v makroskopickém smyslu, např. pro $\Delta V = 10^{-20} \text{m}^3$.

Nejhorší je, že o stavbě reálného světa víme žalostně málo a mnohokrát se ukázalo, že přenos idejí z viditelného světa do mikrosvěta nebo makrokosmu vedl k omylům.

Tuhé těleso se považuje za pevný geometrický útvar, objekt V ve 3D nebo matematicky za množinu $V \subset \mathbb{R}^3$ kladné míry. Vyplnění V hmotou reprezentuje spojitá nebo po částech spojitá funkce ρ , která každému bodu $\mathbf{x} \in V$ přiřazuje číslo $\rho(\mathbf{x}) \geq 0$. Náš prostor běžně chápeme jako euklidovský metrický prostor \mathbb{R}^3 [14] s metrikou

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

O množině V předpokládáme, že je souvislá a omezená v \mathbb{R}^3 a že každá konečná část V je trojrozměrná, tj. existuje $d_m > 0$ takové, že pro každý bod $\mathbf{x} \in V$ má množina

$$K(\mathbf{x}, d_m) = \{\mathbf{y} \in V: d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < d_m\}$$

kladný objem $\int_{K(\mathbf{x}, d_m)} dy_1 dy_2 dy_3 > 0$. Názorně: těleso V má všude kladnou tloušťku (nikde se neredukuje na plochu, čáru, bod) a má konečnou velikost,

$$0 < \max\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}): \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V\} = d_{max} < +\infty.$$

To je malá ilustrace problémů, které nastávají při přenosu matematických pojmů do reálného světa.

S tuhým tělesem se manipuluje jako s množinou bodů $\mathbf{x} \in V$. Např. působí-li na jednotlivý bod $\mathbf{x} \in V$ síla $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, působí na celé těleso výslednice $\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3$.

V gravitačním poli se zrychlením g působí na tuhou soustavu hmotných bodů $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ s hmotnostmi $\{m_1, \dots, m_n\}$ výsledná síla

$$\mathbf{F} = g(m_1 + \dots + m_n).$$

Hmotným středem této soustavy čili působištěm výslednice bude bod $\mathbf{x} = (x, y)$, v němž se anuluje rozdíl

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{f}_k - \mathbf{F} \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n g \mathbf{x}_k m_k - g \mathbf{x} \sum_{k=1}^n m_k,$$

tedy

$$\mathbf{x} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{x}_k}{\sum_{k=1}^n m_k} .$$

Pro těleso V dostaneme přechodem od sumace k integraci stejnými úvahami souřadnice hmotného středu \mathbf{x}_T

$$x_{T,i} = \frac{\int x_i(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x})}{\int_V \rho(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x})} ,$$

přičemž V značí objemovou míru [14], $dV(\mathbf{x}) = dx_1 dx_2 dx_3$.

Podobně se počítá kinetická energie tělesa V

$$E_{kin}(t) = \int_V \frac{1}{2} v^2(\mathbf{x}(t)) \rho(\mathbf{x}(t)) dV(\mathbf{x}(t)) ,$$

kde $v^2(\mathbf{x}(t))$ je čtverec rychlosti bodu $\mathbf{x}(t)$,

$$v^2(\mathbf{x}(t)) = \left(\frac{dx_1(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_3(t)}{dt} \right)^2 .$$

Königova věta [27] říká: kinetická energie soustavy hmotných bodů (tuhého tělesa) je rovna součtu kinetické energie celé hmoty soustředěné do hmotného středu a kinetické energie pohybu hmotných bodů vzhledem k hmotnému středu.

Např. kyvadlo osciluje kolem pevné osy závěsu, kola bicyklu rotují kolem svých os a jejich střed se současně pohybuje přibližně rovnoběžně s povrchem silnice, Země rotuje kolem své osy a zároveň kolem Slunce po přibližně kruhové dráze.

Rotační pohyb s pevnou osou rotace je popsán vzdáleností bodu $\mathbf{x}(t)$ od osy otáčení $\mathbf{0}$ a úhlem $\phi(t)$. Vektor $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{0}$ se nazývá polohový vektor. Úhlová rychlost je derivace orientovaného úhlu ϕ podle času, značí se $\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{d}{dt} \phi(t)$. Vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ leží na ose rotace a směřuje při pohybu proti směru hodinových ručiček dopředu z roviny rotace (jako vektorový součin dvou tečných vektorů k dráze bodu $\mathbf{t}(t_1)$, $\mathbf{t}(t_2)$ pro $t_1 < t_2$). Rychlost bodu je

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) .$$

Moment hybnosti bodu je

$\mathbf{r}(t) \times \rho(\mathbf{r}(t)) dV(\mathbf{r}(t)) \mathbf{v}(t) = \rho(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) dV(\mathbf{r}(t)) = \rho(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}(t) \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) dV(\mathbf{r}(t))$
a moment hybnosti tělesa

$$\mathbf{B} = \int_V \rho(\mathbf{r}(t)) [\mathbf{r}(t) \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t)] dV(\mathbf{r}(t)) .$$

Vektorový součin v hranaté závorce upravíme jeho vyjádřením determinantem

$$\mathbf{r}(t) \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}(t) \times \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \boldsymbol{\omega}_1 & r_1 \\ \mathbf{i}_2 & \boldsymbol{\omega}_2 & r_2 \\ \mathbf{i}_3 & \boldsymbol{\omega}_3 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 r_3 - \boldsymbol{\omega}_3 r_2 \\ \boldsymbol{\omega}_3 r_1 - \boldsymbol{\omega}_1 r_3 \\ \boldsymbol{\omega}_1 r_2 - \boldsymbol{\omega}_2 r_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & r_1 & \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2 \\ \mathbf{i}_2 & r_2 & \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ \mathbf{i}_3 & r_3 & \omega_1 r_2 - \omega_2 r_1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r_2(\omega_1 r_2 - \omega_2 r_1) - r_3(\omega_3 r_1 - \omega_1 r_3) \\ r_3(\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2) - r_1(\omega_1 r_2 - \omega_2 r_1) \\ r_1(\omega_3 r_1 - \omega_1 r_3) - r_2(\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \omega_1(r_2^2 + r_3^2) - \omega_2 r_1 r_2 - \omega_3 r_3 r_1 \\ -\omega_1 r_1 r_2 + \omega_2(r_3^2 + r_1^2) - \omega_3 r_2 r_3 \\ -\omega_1 r_1 r_3 - \omega_2 r_2 r_3 + \omega_3(r_1^2 + r_2^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r_2^2 + r_3^2 & -r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ -r_1 r_2 & r_1^2 + r_3^2 & -r_2 r_3 \\ -r_1 r_3 & -r_2 r_3 & r_1^2 + r_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

V soustavě souřadnic pevně spojené s tělesem je vektor $\mathbf{r}(t)$ konstantní, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}$. Matice \mathbf{j} pak reprezentuje lokální tenzor setrvačnosti. Pro těleso vyplňující objem V je

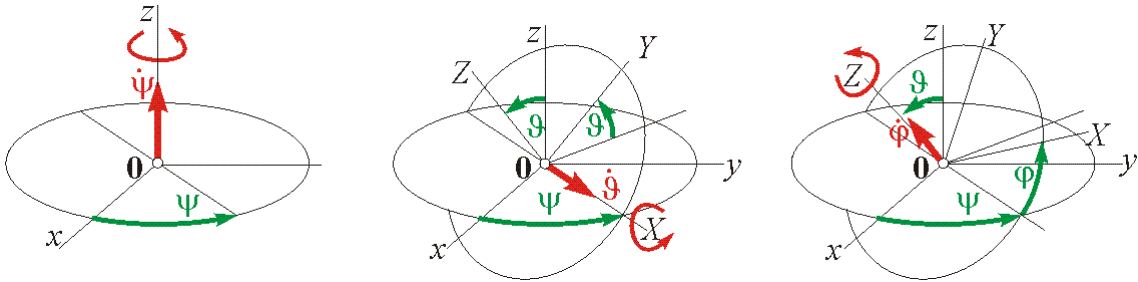
$$\mathbf{B} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{w} = \left[\int_V \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j} dV(\mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{w},$$

kde

$$\mathbf{J} = (J_{ik}) = \left(\int_V \rho(\mathbf{r}) \cdot j_{ik} dV(\mathbf{r}) \right)$$

je tenzor setrvačnosti tělesa. Diagonální elementy J_{ii} definují *momenty setrvačnosti* vzhledem k osám \mathbf{r}_i , J_{ik} pro $i \neq k$ jsou *deviační momenty*. Je zřejmé, že tenzor setrvačnosti je symetrický, $J_{ik} = J_{ki}$.

Abychom mohli použít Hamiltonova principu (nebo jiného z principů mechaniky), potřebujeme vyjádřit kinetickou a potenciální energii tuhého tělesa. Umístíme-li bod $\mathbf{0}$ do hmotného středu tuhého tělesa, je pohyb tělesa úplně popsán rychlostí $\mathbf{v}_0(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}_0(t)$ postupného pohybu bodu $\mathbf{0}$ a rotačním pohybem tělesa kolem tohoto bodu, tj. vektorem úhlové rychlosti $\mathbf{w}(t)$ a tenzorem setrvačnosti \mathbf{J} .



Obr. 4.6 – Eulerovy úhly ψ , ϑ , φ .

Vektor $\mathbf{w}(t)$ lze vyjádřit v různých soustavách souřadnic. Euler zavedl trojici úhlů: precesní úhel ψ ($\in [0, 2\pi)$), nutační úhel ϑ ($\in [0, \pi)$) a rotační úhel φ ($\in [0, 2\pi)$) — to jsou tzv. *Eulerovy úhly* (obr. 4.6) [29,30,32,108,109], z jejichž derivací podle času se vytvoří složky $\mathbf{w}(t)$. Poznamenáváme, že označování Eulerových úhlů není jednotné.

Výslednice sil působících na tuhé těleso je dána 2. Newtonovým pohybovým zákonem

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t),$$

výsledný moment

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} \mathbf{B} = \mathbf{w} \times \mathbf{B} + \frac{d}{dt} \mathbf{B}_{(V)},$$

kde $\mathbf{B}_{(V)}$ značí moment hybnosti v referenční soustavě tělesa vyplňujícího množinu V .

Rozepsáním poslední rovnice podle složek vektorů se dostane soustava Eulerových rovnic pro rotaci tuhého tělesa [29,30,32]. Pro hmotný střed nehybný ve vnější referenční soustavě pak vektorová rovnice

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B} + \mathbf{w} \times \mathbf{B} = \mathbf{M}$$

reprezentuje soustavu rovnic pro složky

$$J_{11} \frac{d}{dt} \omega_1 + \omega_2 \omega_3 (J_{33} - J_{22}) = M_{11},$$

$$J_{22} \frac{d}{dt} \omega_2 + \omega_1 \omega_3 (J_{11} - J_{33}) = M_{22},$$

$$J_{33} \frac{d}{dt} \omega_3 + \omega_1 \omega_2 (J_{22} - J_{11}) = M_{33},$$

Řešení této soustavy *Eulerových rovnic* je obtížné a tradičně se uvádí jen u nejjednodušších případů, jako jsou setrvačnický, kola atd. Např. pro pneumatiku na ráfku (volně otočné automobilové kolo) dostáváme pro osu rotace x_1 rovnici

$$J_{11} \frac{d}{dt} \frac{v}{a_T - u} + 0 \times 0 \times (J_{33} - J_{22}) = M_{11} = R_{res} (a_T - u) + R_{pasiv}.$$

Tyto vztahy tvoří základ metodik pro měření valivého odporu R_{res} pneumatik [102].

Dále se obsáhlou kapitolou dynamiky tuhého tělesa, teorie setrvačnicků atd. zabývat nechci, protože jsem už mnoho zapomněl a čtenář určitě najde lepší výklad v citovaných učebnicích nebo dalších a modernějších knihách o mechanice. Populárnější ale zároveň neúplný výklad je v [110,111]. Nám však jde především o připomenutí Eulerovy práce, ne o perfektní fyzikální pojednání.

4.6. EULEROVA HYDRODYNAMICKÁ ROVNICE

V ideální tekutině nepůsobí žádná smyková napětí. Pascalův zákon říká, že v tekutině je lokální tlak $p(\mathbf{x})$ ve všech směrech stejný. Z vlastní zkušenosti však každý ví, že tlak vody v nádrži nebo v moři je úměrný hloubce, tedy výšce vodního sloupce nad sledovaným místem,

$$p(0, 0, z) = \rho g (0 - z) = -\rho g z.$$

Hustota vnitřních sil (síla působící na jednotku objemu) v gravitačním poli se zrychlením g je

$$\mathbf{F} = -\tilde{\mathbf{N}}p = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (-\rho g z) \\ \frac{\partial}{\partial y} (-\rho g z) \\ \frac{\partial}{\partial z} (-\rho g z) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{pmatrix} = \rho g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Stav proudící tekutiny v bodě \mathbf{r} a čase t je určen 3 složkami rychlosti $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, tlakem $p(\mathbf{r}, t)$ a hustotou ρ (u stačitelých tekutin $\rho(\mathbf{x}, t)$). Zrychlení částice tekutiny

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) (\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)).\end{aligned}$$

Pohybová rovnice

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{F} - \tilde{\mathbf{N}}p$$

přejde po dosazení za zrychlení do *Eulerovy rovnice* hydrodynamiky

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \rho \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) (\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = -\tilde{\mathbf{N}}p + \mathbf{F}.$$

Při stacionárním proudění závislost na čase zmizí, $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$, takže

$$\rho \mathbf{v} (\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}) = \rho \tilde{\mathbf{N}} (\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = -\tilde{\mathbf{N}}p + \mathbf{F}.$$

U potenciálové síly $\mathbf{F} = -\rho \tilde{\mathbf{N}}U$ s potenciálem U a při konstantní hustotě (nestlačitelná tekutina) ρ je pak

$$\tilde{\mathbf{N}}(\rho \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p + \rho U) = 0,$$

tj. platí známá *Bernoulliho rovnice*

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho U = \text{const.}$$

4.7. VLNY NA VODĚ. TSUNAMI

Chování ideální nestlačitelné tekutiny je popsáno Eulerovými rovnicemi, rovnicí kontinuity, okrajovými a počátečními podmínkami. Předpokládejme, že pohyb vznikl rázem – náhlým posunem dna při zemětřesení. Na vodu působí tíže a ta vyvolá kmitavý pohyb jejích částic, vlnu. Podle poměru délky vlny ku hloubce se rozlišují vlny na hluboké vodě a na mělké vodě [31].

U vln na vodě je zřejmá závislost na času. V tomto případě má Bernoulliho rovnice integrál (Cauchyho integrál) [31]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + U = f(t),$$

kde φ je potenciál rychlosti, $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{N}}\varphi$ a f je nějaká funkce času.

U tíhových vln je člen $\frac{1}{2} v^2$ zanedbatelně malý a φ můžeme u vln šířících se ve směru x předpokládat ve tvaru

$$\varphi(x, z, t) = f(z) e^{i(kx - \omega t)}$$

kde $k = 2\pi/\lambda$ je vlnové číslo (úměrné frekvenci) pro délku vlny λ a ω úhlová frekvence. Funkce φ jako potenciál splňuje Laplaceovu rovnici

$$(\tilde{\mathbf{N}} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Po dosazení $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = (ik)^2 f(z) e^{i(kx - \omega t)} = -k^2 f(z) e^{i(kx - \omega t)}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f''(z) e^{i(kx - \omega t)}$ dostaneme

lineární diferenciální rovnici pro funkci f

$$f''(z) - k^2 f = 0,$$

která má obecné řešení $f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$.

Na dně v hloubce $z = -h$ platí okrajová podmínka

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, -h, t) = f'(-h) e^{i(kx - \omega t)} = (Ak e^{-kh} - Bk e^{kh}) e^{i(kx - \omega t)} = 0,$$

tj.

$$Ae^{-kh} - Be^{kh} = 0.$$

Konstanty A , B jsou tedy závislé a můžeme zvolit $A = Ce^{kh}$, $B = Ce^{-kh}$. Potenciál rychlosti je pak

$$\varphi(x, z, t) = C [e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}] e^{i(kx - \omega t)} = 2C \cosh [k(h+z)] e^{i(kx - \omega t)}.$$

Na hladině, tj. ploše

$$z = w(x, y, t)$$

v okamžiku t , platí pro vertikální složku rychlosti

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Předpokládáme, že délka vlny je mnohem větší než její amplituda, takže $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ jsou

malé a první dva sčítance na pravé straně jsou zanedbatelné. Pro nevířivý pohyb je

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Rychlost změny potenciálu rychlosti je úměrná výchylce hladiny

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=w} = -gw.$$

Takže $w = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=w}$ a

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{z=w} - \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{z=w} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=w} + \frac{1}{g} \left. \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=w} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] \Big|_{z=w} = 0.$$

Výchylky hladiny považujeme za malé, takže pro hladinu máme zjednodušenou okrajovou podmínku

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] \Big|_{z=0} = 0$$

Po dosazení $\varphi(x, z, t) = 2C \cosh [k(h+z)] e^{i(kx - \omega t)}$ dostaneme

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 2Ck \sinh(kh) e^{i(kx-\omega t)},$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{z=0} = 2C \cosh(kh) (-\omega^2) e^{i(kx-\omega t)}$$

a okrajová podmínka přejde do tvaru

$$gk \sinh(kh) - \omega^2 \cosh(kh) = 0.$$

Odtud $\omega^2 = gk \tanh(kh)$. Rychlost šíření vln pak je

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k} \sqrt{gk \tanh(kh)} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)},$$

Po dosazení $k = 2\pi/\lambda$, kde λ je délka vlny, dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}.$$

Pro malé h a velké λ je podíl $\frac{2\pi h}{\lambda}$ malý. Rozvoj hyperbolické tangens v Taylorovu řadu

$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots$ a ponechání jen první mocniny dává jednoduchý odhad

$$v \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \frac{2\pi h}{\lambda}} = \sqrt{gh}.$$

Tsunami

Délka obyčejné vlny na oceánu způsobené větrem zřídka přesáhne 100m [112].

V hluboké vodě oceánu vzniknou posunem části dna při zemětřesení a posunu geologických desek vlny s délkou stovek kilometrů a výšce obyčejně nepřesahující 1m, takže větší lodě je ani nezpozorují [112,113]. Při šíření oceánem amplituda vlny klesá velmi pomalu, jak jsme mohli vidět při nedávném zemětřesení v Chile (27. 2. 2010). Přenášená energie je obrovská 10^{15} – 10^{16} J (srovnatelná s explozí termonukleární bomby, megatuny TNT), proto v mělké vodě u pobřeží výška vln velmi vzroste a provází ji devastace pobřeží. Erupce sopky Krakatoa 1883 způsobila tsunami s výškou vlny na pobřeží 37m, pobřeží mysu Lopatka na jihu Kamčatky v severovýchodním Rusku zasáhlo roku 1737 tsunami s výškou vlny odhadovanou na 64m.

Příklad. Předpokládejme hloubku oceánu $h = 5$ km, délku vlny $\lambda = 200$ km. Pro vlnu tsunami vychází rychlost šíření

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}} = \sqrt{\frac{9.8 \times 200000}{2\pi} \tanh \frac{2\pi \times 5000}{200000}} = 220.456 \text{m/s} = 793.6 \text{km/h}.$$

Podíl $h/\lambda = 5/200 = 0.025$ můžeme považovat za malý a použít přibližného vzorce

$$v_{\text{approx}} \approx \sqrt{gh} = \sqrt{9.8 \times 5000} = 221.359 \text{m/s} = 796.9 \text{km/h}.$$

Poměrná chyba je $(v_{\text{approx}}/v - 1) = 0.4\%$.



5. DOSLOV

Každý, kdo se aspoň trochu seznámí s Eulerovým dílem, je ohromen bohatstvím a kvalitou zpracovaných témat. I dnešní základní kurzy matematiky (diferenciálního a integrálního počtu, např. [79–81]) pořád zachovávají hodně ze základní struktury, kterou jim dal Eulerův genius. Pro vyjádření velikosti Eulerova ducha stačí uvést dva známé citáty jiných dvou matematických geniů [5]:

P. S. Laplace: Lisez, lisez Euler, c'est notre maître à tous (čtete, čtete Eulera, je učitelem nás všech).

C. F. Gauss: Studium Eulerova díla zůstane nejlepší školou pro nejruznější oblasti matematiky a nemůže je nic nahradit.

Pro ilustraci uvedme ještě citáty z pamětní řeči (oslavného spisu) [45].

“... ”

Mezi velkým počtem jeho studií není ani jedna, která by neobsahovala nějaký nový objev nebo nějakých důvtipný pohled, který ukazuje nový směr. Nacházíme skvělé sjednocující koncepce, množství objevných a zjemňujících úvah v nejabstraktnější analýze, skutečně hluboký výzkum povahy a vlastností čísel, krásné důkazy mnoha Fermatových vět, řešení mnoha velmi obtížných problémů rovnováhy a pohybu tuhých i pružných těles nebo kapalin s nepřehledným množstvím paradoxů. Všechno, co teorie pohybu nebeských těles, jejich vzájemná přitažlivost a popisy dráhy ukazují jako nejabstraktnější a nejobtížnější problémy, je obsaženo v jeho díle, a je to podáno s takovou dokonalostí, která náleží jen největším matematikům. Neexistuje jediná větev matematiky, která by mu nebyla zavázána.

Jen málo matematiků toho napsalo tolik jako pan Euler a nikdo se nezabýval současně tolika problémy, nikdo se s ním nemůže srovnávat ať už jde o počet nebo rozmanitost jeho objevů.

... ”

V prvních dnech září (1783) byl znepokojen závratěmi. Ty mu však nezabránilly ve výpočtech pohybu aerostatických balonů, o němž se z publikací dalo dovědět jen velmi málo a on vlastními výpočty byl schopen dojít k velmi komplikovaným závěrům. Závratě byly varováním před smrtí, která přišla 18. září (7. září juliánského kalendáře). Toho dne u stolu při večeři mluvil o objevu nové planety s panem Lexellem, který jej přišel navštívit. S jasným intelektem mluvil i o dalších věcech, pak si hrál s jedním ze svých vnoučků. Při šálku čaje byl náhle raněn mrtvicí. Jeho poslední slova byla: “Umírám“, načež upadl do bezvědomí. Zemřel několik hodin potom ve věku 76 let, 5 měsíců a 3 dnů.

Zemřel děkan naší akademie, který byl 56 let její slávou a okrasou. Byl svědkem zrodu a růstu této akademie, viděl její úpadek a později její znovuzrození. Jeho výjimečný duch měl tak obrovský vliv na práci členů akademie, že navzdory tomu, co pro ni udělal během pobytu v Berlíně, přinesl jeho návrat její oživení. Před svou smrtí měl pevnou útěchu ve vědomí, že akademie se pod patronací moudré a osvícené kněžny Daškové (Е. Р. Воронцова-Дашкова) [114] probouzí do krásných dní. Mezi jeho uspokojením a vlivem, který na Petrohradskou akademii vždy měl, byl vztah přímé úměrnosti.

Pan Euler byl pevné a houževnaté tělesné konstituce. Po četných náporech nemoci, kterými utrpěl jeho zrak a zdraví, by byl určitě ztratil schopnost tak intenzivní práce, kdyby se nenarodil s velmi robustní odolností.

... ”

Setkal jsem se s cizinci, které přivedl jeho věhlas. A ještě víc než sláva jeho obecná přístupnost s mnoha vlastnostmi, které zřídka provázejí člověka s tak bohatou činností. Viděl jsem, jak odcházejí s úžasem a obdivem. Nebyli schopni pochopit, jak člověk, který přes půl století byl nadměrně zatížen publikací tolika svých objevů v matematice a ve fyzice, může držet v paměti tolik věcí, z nichž mnohé jsou pro jeho vědeckou činnost bezvýznamné a zbytečné. Bylo to díky skvělé paměti, která uchovávala všechno,

co jednou slyšel. Euler byl schopen latinsky recitovat Aeneis [115] bez přerušení od začátku do konce a uvést počáteční a poslední větu z každé stránky vydání, které znal – a tato schopnost mu zůstala do pozdních let.

Další doklad o jeho fantastické paměti je tento: jednou, když nemohl spát, počítal prvních 6 mocnin čísel od 2 do 20 a po několika dnech nám je k našemu velkému překvapení recitoval...

...“

Na závěr ještě citace z [39]:

“...“

Euler obohatil znalosti mnoha odvětví vědy a ve všech využil svých matematických schopností. Udělal důležité práce v astronomii včetně

stanovení oběžných drah komet a planet na základě několika pozorování, metod výpočtu paralaxy Slunce, teorie refrakce, úvah o fyzikální povaze komet... Jeho výjimečné práce, za něž získal mnoho cen Pařížské akademie věd, se zabývají nebeskou mechanikou, která tehdy přitahovala mnoho učenců.

...

Eulerovu teorii Měsíce použil Tobias Mayer při sestavování tabulek pohybu Měsíce. V roce 1765 dostala vdova po Mayerovi z Anglie 3 000 liber za přínos, kterým tyto tabulky přispěly k určování zeměpisných délek. Euler za svůj teoretický příspěvek a základ výpočtů těchto tabulek dostal 300 liber.

...“

K tomu můžeme jen dodat, že korelace mezi finančním ohodnocením (bohatstvím) a vědeckou hodnotou práce byla, je a bude malá – stejně v 18. jako v 21. století. Správa peněz a věda jsou oblasti lidské činnosti s téměř prázdným průnikem.

•

Je jasné, že uvést všechny pojmy s přívlastkem Eulerova jména není možné. Např. se zabýval lemniskátou a v souvislosti s délkou jejího oblouku i eliptickými funkcemi [16].

Ke jménu Euler se v minulosti přiřadila spousta matematických objektů a tento trend jistě bude pokračovat i u nových objektů v budoucím vývoji matematiky.

•

Zájemcům o obsáhlejší životopis Leonharda Eulera lze doporučit eulogii [45] nebo pamětní spis [116] markýze Condorceta (1743–1794) [117] uveřejněný ve Francii 1786 a jehož anglický překlad dala na internet americká The Euler Society [118].

Další Eulerovy portréty jsou na internetové stránce [119].



6. ODKAZY

1. http://www.gap-system.org/~history/HistTopics/Babylonian_numerals.html .
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Babylonian_mathematics#Geometry .
3. <http://www.koutny-math.com/> (Numerical Methods & Fourier Analysis) .
4. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Egyptian_mathematics.html .
5. STRUIK, D. J.: *Dějiny matematiky*. ORBIS Praha 1963.
6. <http://www.koutny-math.com/> (Additive Sequences) .
7. http://en.wikipedia.org/wiki/Liber_Abaci .
8. http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_oldest_universities_in_continuous_operation .
9. KOŘÍNEK, V.: *Základy algebry*. NČSAV Praha 1956.
10. http://cs.wikipedia.org/wiki/Kubická_rovnice .
11. BIRKHOFF, G. – MAC LANE, S.: *Prehľad modernej algebry*. ALFA Bratislava 1979 .
12. <http://www.zas.cz/download/newton-predn.pdf> .
13. http://en.wikipedia.org/wiki/Joost_B%C3%BCrgi .
14. <http://www.koutny-math.com/> (Mathematical Base for Applications) .
15. <http://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm> .
16. <http://www.zas.cz/download/gauss.pdf>
17. <http://www.koutny-math.com/> (Prelude to Probability and Statistics) .
KOUTNÝ, F.: *Matematická statistika*. Skriptum UTB Zlín 2005.
18. http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat .
19. <http://www.gap-system.org/~history/Mathematicians/Desargues.html> .
20. <http://mathworld.wolfram.com/PappusHexagonTheorem.html> .
21. http://en.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes .
22. <http://www.math.hmc.edu/funfacts/ffiles/20001.1.shtml> .
23. <http://www.am.vsb.cz/MODAM06/Prednasky/sarmanova.pdf> . (Archimédes)
24. <http://www.zas.cz/download.php> (V. Zíka).
25. <http://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes> .
26. <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Barrow.html> .
27. TRKAL, V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*. NČSAV Praha 1956.
28. http://en.wikipedia.org/wiki/Jean_le_Rond_d'Alembert .
29. BRDIČKA, M. – HLADÍK, A.: *Teoretická mechanika*. ACADEMIA Praha 1987.
30. OBETKOVÁ, V. – MAMRILOVÁ, A. – KOŠINÁROVÁ, A.: *Teoretická mechanika*. Alfa Bratislava 1990.

31. BRDIČKA, M.: *Mechanika kontinua*. NČSAV Praha 1959.
 32. KVASNICA, J. aj.: *Mechanika*. ACADEMIA Praha 1988.
 33. TICHONOV, A. N. – SAMARSKIJ, A. A.: *Rovnice matematické fyziky*. NČSAV Praha 1955.
 34. http://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation .
 35. <http://www.maths.gla.ac.uk/~fhg/waves/> .
 36. http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_family .
 37. http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_trial (Bernoulliho rozdělení pravděpodobnosti) .
 38. http://images.google.com/images?hl=en&source=hp&q=bernoulli+principle&um=1&ie=UTF-8&ei=RTAWS_iRHZbwmwOT4eX4Bg&sa=X&oi=image_result_group&ct=title&resnum=5&ved=0CB4QsAQwBA .
 39. <http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Euler.html> .
 40. CALINGER, R., *Leonhard Euler, the first St. Petersburg years (1727–1741)*, *Historia Mathematica* **23**, 1996, pp. 121–166.
 41. http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Louis_Maupertuis#Biography .
 42. <http://math.dartmouth.edu/~euler/correspondence/correspondents/Maupertuis.html> .
 43. <http://math.dartmouth.edu/~euler/correspondence/correspondents-major.html> .
 44. <http://encyclopedia.jrank.org/RHY RON/ROBINS BENJAMIN 17071751 .html> .
 45. <http://math.dartmouth.edu/~euler/historica/fuss.html> **Fuss' Eulogy** .
 46. http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number .
 47. http://www.primepuzzles.net/conjectures/conj_004.htm .
 48. http://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_totient_function .
 49. http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_reciprocity .
 50. <http://mathworld.wolfram.com/TwinPrimeConjecture.html> .
 51. <http://www.coolissues.com/mathematics/Tprimes/tprimes.htm> .
 52. http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand's_postulate .
 53. http://en.wikipedia.org/wiki/Goldbach%27s_conjecture .
 54. VINOGRADOV, I. M.: *Osnovy teorii čísel* (rusky). Nauka Moskva 1972.
 55. <http://pdf.uhk.cz/kma/KuZAPrednasky.pdf> .
 56. <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/Geometry/eulerline.html> .
 57. <http://www.mathopenref.com/eulerline.html> .
 58. <http://cs.wikipedia.org/wiki/Kaliningrad> .
 59. <http://www.gap-system.org/~history/Extras/Konigsberg.html> (Königsberg bridges) .
 60. <http://teorie-grafu.elfineer.cz/zakladni-pojmy/> .
 61. SEDLÁČEK, J.: *Úvod do teorie grafů*. Academia Praha 1981.
 62. <http://www.wmueller.com/precalculus/e/e0.html> .
-

-
63. [http://en.wikipedia.org/wiki/E_\(mathematical_constant\)](http://en.wikipedia.org/wiki/E_(mathematical_constant)), <http://www.mu.org/~doug/exp/> .
64. VOPĚNKA, P.: *Vyprávění o kráse novobaroční matematiky*. PRÁH Praha 2004.
65. RUDIN, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*. Academia Praha 1977.
66. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/De_Moivre.html .
67. [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sine_and_Cosine_fundamental_relationship_to_Circle_\(and_Helix\).gif](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sine_and_Cosine_fundamental_relationship_to_Circle_(and_Helix).gif) .
68. http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function#Euler_product_formula .
69. http://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem .
70. <http://www.southernct.edu/~sandifer/Ed/History/Preprints/Talks/NYU%20Basel%20Problem%20Aper.PDF> .
71. ČERNÝ, I.: *Základy analýzy v komplexním oboru*. Academia Praha 1967.
72. MARKUŠEVIČ, A. I.: *Kratkij kurs teorii analitičeskich funkcij*. Nauka Moskva 1966.
73. <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/bernoulli.html> (B_n).
74. <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Gamma/gamma.pdf> ($\gamma=0.5772\dots$).
75. http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Mascheroni_constant ($\gamma=0.5772\dots$).
76. <http://arxiv.org/ftp/math/papers/0310/0310404.pdf> (irrationality of γ).
77. <http://primes.utm.edu/glossary/xpage/Gamma.html> ($\gamma=0.5772\dots$).
78. www.koutny-math.com (Notes on Harmonic Series) .
79. JARNÍK, V.: *Integrální počet I*. NČSAV Praha 1956.
80. FICHTENGOLC, G. M.: *Kurs diferencialnogo i integralnogo isčislenija II*, GIFML Moskva 1959.
81. JARNÍK, V.: *Integrální počet II*. NČSAV Praha 1955.
82. BRONŠTEJN, I. N. – SEMENDJAJEV, K. A.: *Spravočnik po matematike*. GIFML Moskva 1959.
83. http://en.wikipedia.org/wiki/Lists_of_integrals#Composed_functions (Composed functions) .
84. www.koutny-math.com (Prelude to Probability and Statistics).
85. ANĎĚL, J.: *Matematická statistika*. SNTL Praha 1978.
86. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Complex_gamma.jpg .
87. www.koutny-math.com (Tensile Strength of Materials, Geometry & Mechanics of Pneumatic Tires).
88. http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_polynomials .
89. DĚMIDOVIČ, B. P. – MARON, I. A.: *Osnovy vyčísliťelnoj matematiki*. Nauka Moskva 1966.
90. RALSTON, A.: *Základy numerické matematiky*. Academia Praha 1973.
91. BUREŠ, J. – HRUBČÍK, K.: *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. Karolinum Praha 1998.
92. http://www.google.com/books?hl=cs&lr=&id=TIXg4hSXmFAC&oi=fnd&pg=PP11&dq=euler+the+orem+on+curvature+in+diff.+geometry&ots=1Y8XxrzkAU&sig=avLukz1XQHngEmox7ur_3rivecY#v=onepage&q=&f=false .(Eulerův vztah pro křivost křivky na ploše)
93. STĚPANOV, V. V.: *Kurs diferenciálních rovnic*. JČMF Praha 1950.
-

-
94. KURZWEIL, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. SNTL Praha 1978.
95. VITÁSEK, E.: *Numerické metody*. SNTL Praha 1987.
96. ELSGOLC, L. E.: *Variační počet*. SNTL Praha 1965.
97. <http://mechanika.johnyho.net/?page=6> (C. Höschl: Historie variačního počtu) .
98. <http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html> (brachistochrona) .
99. http://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve .
100. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Brachistochrone.html> .
101. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lagrange.html> (Lagrange) .
102. www.koutny-math.com (Geometry & Mechanics of Pneumatic Tires)
KOUTNÝ, F.: *Konstrukce výrobků. Geometrie a mechanika pneumatik*. Skriptum UTB Zlín 2009.
103. <http://www.ucmp.berkeley.edu/history/hooke.html> (R. Hooke) .
104. [http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Young_\(scientist\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Young_(scientist)) (T. Young) .
105. <http://en.wikipedia.org/wiki/Buckling> (vzpěr) .
106. http://en.wikipedia.org/wiki/Maupertuis'_principle (Euler–Maupertuis' principle) .
107. http://en.wikipedia.org/wiki/Principle_of_least_action .
108. http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles .
109. <http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html> .
110. FEYNMAN, R. P. – LEIGHTON, R. B. – SANDS, M.: *Feynmanove přednášky z fyziky I*, Alfa Bratislava 1980.
111. HORÁK, Z. – KRUPKA, F.: *Fyzika*. SNTL Praha 1966.
112. http://ffden-2.phys.uaf.edu/212_spring2005.web.dir/michael_tapp/travel.htm (tsunami) .
113. http://www.ema.gov.au/www/ema/schools.nsf/Page/Get_The_FactsTsunami#thumb .
114. http://en.wikipedia.org/wiki/Yekaterina_Romanovna_Vorontsova-Dashkova .
115. PUBLIUS VERGILIUS MARO: *Aeneis*. (Překlad O. Vaňorný, cca 400 stran) Svoboda Praha 1970.
116. http://www.gap-system.org/~history/Extras/Euler_elogium.html Condorcet's Eulogy .
117. http://en.wikipedia.org/wiki/Marquis_de_Condorcet .
118. <http://www.eulersociety.org/> .
119. <http://www.gap-system.org/~history/PictDisplay/Euler.html> (portréty) .

