Carl Friedrich Gauss

F. Koutný, Zlín

(30. 04. 1777 – 23. 02. 1855)

•

Každé vyprávění o někom, kdo žil dávno, je nutně jen kompilací pramenů a odkazů, které v nejlepším případě pocházejí od jeho pamětníků. Rámec tohoto textu tvoří úryvky knihy [1], která poprvé vyšla před víc než 100 lety. Na ně navazují věcné komentáře a další odkazy. Na mnoho pojmů spojených s Gaussovým jménem se bohužel nedostane.

DĚTSTVÍ

C. F. Gauss pocházel z velmi chudé rodiny. Jeho otec, Gebhard Dietrich Gauss (1744-1808), byl zedníkem a mistrem vodních staveb, ale vykonával různé příležitostné práce. Pomáhal např. jednomu obchodníkovi při trzích v Braunschweigu a Lipsku. Protože dobře psal a počítal, fungoval také jako účetní. Posledních 15 let života pracoval jako zahradník. Byl to absolutně poctivý, přímý a čestný muž. Ale doma byl panovačný a často hrubý, takže malý Carl s ním těžko mohl navázat důvěrnější vztah.

Carl se narodil v Braunschweigu 30. dubna 1777 v domě, z něhož se později stalo museum a jenž byl označen pamětní deskou. Dům byl zničen při náletu 15. října 1944.

Matka Dorothea (1743-1839) datum jeho narození neznala, věděla jen, že to bylo ve středu 8 dní před Nanebevstoupením Páně. To se Gausovi stalo později podnětem k sestavení vzorce pro výpočet data velikonoc. Dorothea se přistěhovala do Braunschweigu a 1776 se provdala za Gebharda Gausse. Byla to žena s přirozenou inteligencí, bez předsudků, dobrosrdečná a charakterní. Její velký syn byl jejím jediným dítětem, její hrdostí. Lnula k němu s velkou láskou, stejně jako on k ní. Měla dobré zdraví, ale poslední 4 roky života už byla slepá. Dožila se úctyhodných 96 let.

Už v nejrannějším věku Gauss vykazoval mimořádné vlohy. Když se různých členů rodiny doptal, jak se čtou jednotlivá písmena abecedy, naučil se ještě před školou sám číst. Zvládl také aritmetiku a počítání zpaměti tak, že udivoval rodiče a jejich přátele.

Gaussův otec pracoval přes léto jako předák zedníků. Ve čtvrtek se počítaly a vyplácely výplaty. Když někdo pracoval přesčas, dostal úměrně víc. Jednou ale 3letý chlapec vykřikl: Tati, ten výpočet je špatně! a řekl, jak by to mělo být správně. Předtím totiž nepozorován počítání sledoval. Když otec pečlivě zkontroloval výpočet, zjistil, že chlapec měl pravdu. Později Gauss v legraci říkával, že se naučil dřív počítat než mluvit.

V 7 letech r. 1784 začal Gauss chodit do obecné školy (St. Katharine Volkschule). Třídou byla nízká místnost s 200 žáky, hrbolatou podlahou a nízkým stropem. Učitel J. G. Büttner se procházel po třídě sem a tam, v ruce rákosku, což byl tehdy nezbytný vyučovací prostředek. Gauss po dvou letech bez problémů postoupil do aritmetické třídy. Jednou Büttner zadal příklad: sečíst všechna přirozená čísla od 1 do 100, tedy vypočíst $s = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$. Za chvilku Gauss položil svou tabulku s číslem 5050 na stůl. Büttner se sarkasticky podíval na malého chlapce, ale ten seděl klidně, přesvědčen o správnosti výsledku. Uměl také vysvětlit, jak k výsledku přišel: $s = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) = 50\times101 = 5\,050$.

Büttner mu potom koupil knihu o aritmetice a brzy dospěl k názoru, že už nemá, co by chlapce mohl naučit.

Büttner nebo jeho pomocník Bartels dokonce pozvali Gaussova otce, aby si s ním promluvili o dalším chlapcově vzdělání. A tak se stalo, že i dříve tvrdohlavý otec souhlasil s tím, že chlapec už nebude muset spřádat každý den svůj díl lnu. Otec prý po této rozmluvě odnesl vřeteno na zadní dvůr a později z něj naštípal třísky na rozdělávání ohně v kuchyni.

Po večerech teď Gauss mohl při svíčce vysedávat nad knihami o matematice. Obstarával mu je Büttnerův pomocník J. C. M. Bartels, který se sám o matematiku intenzivně zajímal a později (od r. 1808) vedl 12 let katedru matematiky na universitě v Kazani (jeho studentem byl N. I. Lobačevskij).

Gauss v 11 letech zvládl binomickou větu a seznámil se s nekonečnými řadami, což mu otevřelo cestu k infinitesimálnímu počtu.

Johann Christian Martin Bartels měl velkou zásluhu na dalším Gaussově osudu, protože o schopnostech svého žáka informoval vlivné osoby, zejména E. A. W. Zimmermanna, který byl profesorem matematiky, fyziky a přírodní historie na zdejším Collegiu Carolinu. Zimmermann byl později císařem povýšen do šlechtického stavu a stal se tajným radou u dvora brunšvického vévody. Jednoho dne nařídil Barthelsovi, aby přivedl mladého Gausse. Profesor Hellwig, nový učitel matematiky na Katharineu, vrátil první písemnou práci Gaussovi s tím, že by bylo zbytečné, aby takový matematik poslouchal jeho výklad.

Podle Gaussových vlastních slov to bylo téměř proti otcově vůli, že odešel z Büttnerovy školy a za podpory přátel začal studovat antické jazyky.

Brunšvická vévodkyně jednou našla mladého Gausse ponořeného do nějaké knihy. Po počáteční nedůvěře poznala, že ten malý chlapec skutečně rozumí tomu, co čte. Velmi překvapena to řekla vévodovi, Karlu Vilému Ferdinandovi (1735-1806), a ten si pro malého Gausse nechal poslat. Když lokaj přišel ke Gaussům, poslali ho nejdřív za starším nevlastním bratrem Georgem. Ten se velmi divil a protestoval. Pak se ale vyjasnilo, že přišel za mladším Carlem, za tím ´budižkničemu´, který ´věčně vězel nosem v knihách´.

Prostředí zámku bylo pro chudého a plachého 14letého chlapce oslnivé. Ale taktní vévoda s vědomím, že před sebou má velmi výjimečného člověka, věděl, jak si získat jeho důvěru a jak použít prostředků potřebných pro další rozvoj jeho talentu. Gauss odešel obohacen několika způsoby. Dostal své první logaritmické tabulky, s vévodovou pomocí nastoupil do Collegia Carolinum, předchůdce nynější Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig. Byl zřízen speciální účet, z něhož byly Gaussovi hrazeny studijní pomůcky a školné. Není pochyb, že kromě toho ho vévoda podporoval ještě dalšími dary z vlastních příjmů.

●

STUDENTSKÁ LÉTA - PRVNÍ VĚDECKÉ PRÁCE

Collegium Carolinum byla škola vyplňující mezeru mezi gymnáziem a universitou. Studovali zde budoucí úředníci, architekti, inženýři, obchodníci, statkáři a získávali široký základ pro své povolání před specializací. Vyučovaly se klasické i moderní jazyky, věrouka a morálka, filosofie, obecná, církevní a literární historie, civilní a kanonické právo, matematika, fyzika, anatomie, německá poezie a řečnictví, teorie krásna v malířství a sochařství, cvičení v kreslení a rýsování, v hudbě, tanci, šermu a jízdě na koni, tělocvik a opracování skla. Důležitější než samotné předměty však byl duch ústavu. Žáci byli vedeni jako nositelé nové kultury, svobodnější a ušlechtilejší. Učitelé věnovali žákům své nejlepší schopnosti.

Gauss se 18. února 1792 se zapsal pod číslem 462 jako Johann Friedrich Carl Gauss, Brunswick. Jméno Johann později nikdy neuváděl a všude na jeho písemnostech je jen Carl Friedrich Gauss. Na Collegiu Carolinu dokončil studium antických jazyků a učil se moderní jazyky. Studoval zde 4 roky a sám intenzivně studoval matematiku. Zdá se, že nejvíc studoval práce Newtona, Eulera, Lagrange. U Newtona oceňoval axiomatický přístup a přesnost.

●

Gaussův deník z mládí – malý 19stránkový sešit považovaný dnes za jeden z nejvzácnějších dokumentů historie vědy – zůstal neznámý až do r. 1898, kdy jej mezi rodinnými papíry našel Gaussův vnuk. Obsahuje 146 krátkých záznamů o Gaussových objevech od 1796 do 1814.

●

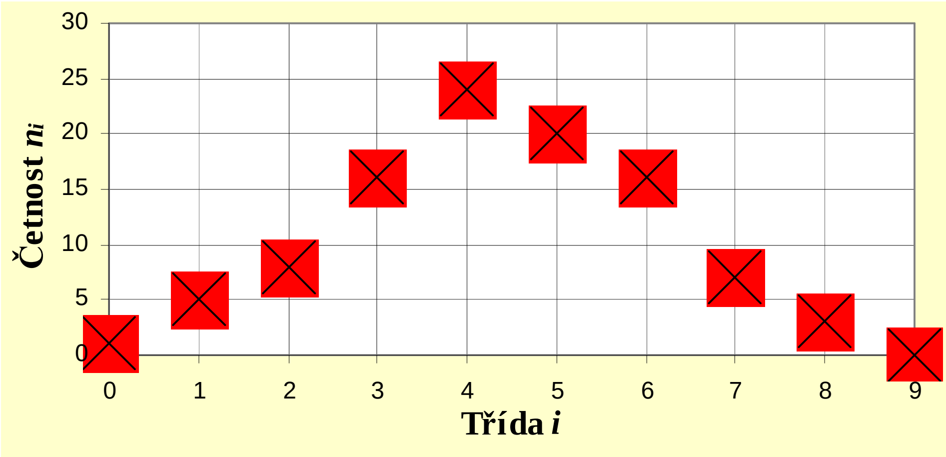
V posledním roce svého pobytu v rodném Braunschweigu 1795 Gauss objevil “*metodu nejmenších čtverců*“. Daniel Huber z Basileje i Adrien-Marie Legendre tuto metodu objevili také. Legendre ji uveřejnil 1805 v Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites, ale Gauss ji publikoval až v r. 1809.

Při měření vyvstává nutnost klasifikace chyb. Jako příklad si představme, že 100 lidí si nastaví individuálně na měřidle ve tvaru $\wedge$ vzdálenost 1 metr a “krokováním“ bude měřit např. obvod fotbalového hřiště. Můžeme čekat, že takto získané počty kroků asi nebudou stejné. Těžko však lze předem říci, kolikrát se jednotlivé počty kroků vyskytnou. Všechny vytvoří nějakou množinu celých čísel, tříd, a celkový počet měření $n = 100$ se podle počtu kroků přirozeně rozpadne na skupiny s pořadím 0, 1, 2, …, m.

Zvolme třeba $m = 10$ a měření modelujme náhodným generováním 100 čísel

$$X = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9,$$

kde a_j, $j = 0, \ldots, 9$ náhodně nabývají hodnotu 0 nebo 1. Totéž se děje při hodu 10 mincemi, značí-li x_k počet těch mincí, na kterých v k-tém hodu padla hlava. Po $n = 100$ simulacích nebo hodech vytvoří počty n_i stejných x_k podobný graf jako na obr. 1.



Obr. 1 – Distribuce 100 náhodně generovaných čísel x_k, k = 1, …, 100.

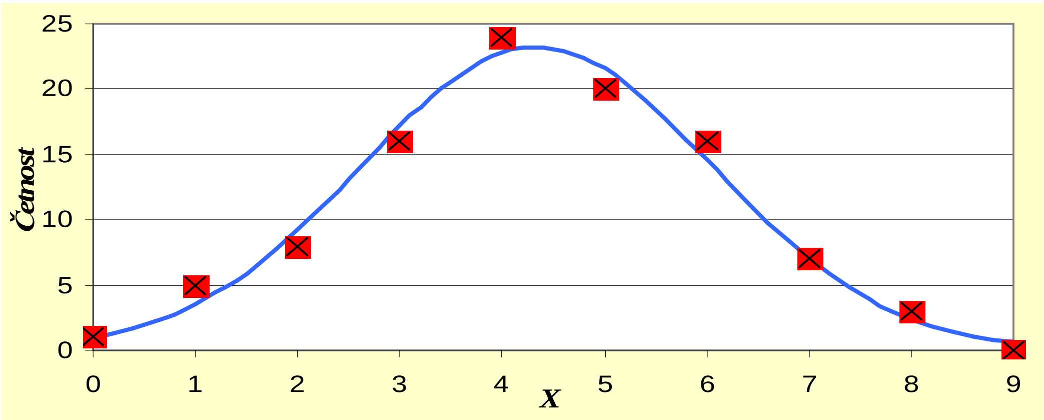
Čísla x_k se vyskytují s různými četnostmi. Reprezentují diskrétní náhodnou veličinu X patřící do binomického rozdělení [2]: pravděpodobnost, že počet X padne do třídy k je

$$\binom{m}{k} p^{m-k}(1-p)^k = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \binom{10}{k} 2^{-10}.$$

Měření se však zpravidla týká veličin, které, aspoň zdánlivě, vypadají jako spojité, tedy s hodnotami z oboru reálných čísel (např. 100 účastníků udělá měřidlem 10kroků a vzdálenost počátečního a koncového bodu se ´přesně´ změří pásmem).

Binomické rozdělení pro n, $m \to \infty$ přechází do *normálního* čili *Gaussova rozdělení* s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right].$$



Obr. 2 – Diskrétní četnosti z obr. 1 a hustota odpovídajícího normálního rozdělení s μ=4.34, σ =1.72.

Obr. 2 ukazuje průběh funkce $n \times f$ pro vhodné hodnoty μ, σ ve srovnání s diskrétními hodnotami četností z obr. 1. Distribuční funkci $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-x}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$ se zpravidla říká *Gaussův* nebo *Gaussův-Laplaceův integrál*. Hodnoty jeho normované verze $\Phi(u) = F(\frac{x-\mu}{\sigma})$ nebo hodnoty inverzní funkce $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ pro zadanou pravděpodobnost $1-\alpha$ se tradičně uvádějí ve statistických tabulkách jako kritické hodnoty [2].

Parametry normálního rozdělení se odhadují takto:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} n_k x_k = \bar{x} \quad \text{(výběrový průměr)}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{m} n_k (x_k - \bar{x})^2 = s^2 \text{ (výběrový rozptyl)}$$

Stanovení statistik $\bar{x}$ a s^2 je podstatnou částí zpracování dat každého měření. Proto i v docela jednoduchých kalkulátorech jsou zabudovány programy pro jejich výpočet.

ZÁKON CHYB. REGRESE

Gaussův zákon chyb říká: jednotlivá měření jsou nezávislá a chyba jednotlivého měření má normální rozdělení.

Je to však vlastně jen doporučení a *předpoklad*, který nemusí vždy platit. I přesto bývá obvykle užitečný a umožňuje vyslovovat mnoho důležitých tvrzení. U malých souborů dat, u nichž nelze distribuci příslušné náhodné veličiny ověřit, nezbývá než předpoklad normality použít. Nemělo by se ale zapomnět, že tím uvažovanou náhodnou veličinu aproximujeme jinou náhodnou veličinou s normálním rozdělením. To se týká měření a jejich aplikací, např. při regulaci výroby, hodnocení kvality výrobků atd.

Jsou-li soubory dat dostatečně velké (stovky a tisíce), často lze ukázat, že předpoklad normality neplatí. To platí např. pro tržby v obchodech nebo náklady podniku, ceny prodaných jízdenek na železničních stanicích, tržby na benzinových pumpách, spotřebu vody nebo elektrické energie v domácnosti, pevnost materiálů atd. (např. [2] (*Tensile Strength of Materials*) nebo[3]) .

•

Úlohu regrese spočívající v tom, jak proložit adekvátní funkci shlukem bodů získaných např. měřením hodnot funkce, řešilo už před Gaussem více matematiků. Třeba Laplace navrhl 1774 minimalizaci absolutních hodnot reziduálů,

$$r_i = f(x_i) - y_i\,, \quad i = 1, \ldots, n,$$

tj. rozdílů mezi hodnotou zvolené funkce f v bodě x_i a změřenou hodnotou y_i.

V jednoduchém případě přímky, $f(x) = a + bx$, jde v Laplaceově pojetí o úlohu

$$S_{|\ldots|}\,(a, b) = \sum_{i=1}^{n} |r_i| = \sum_{i=1}^{n} |a + bx_i - y_i| \longrightarrow \min$$

Tato úloha je sice matematicky korektní, ale je nepříjemná. Problémy působí absolutní hodnota při změně znaménka jednotlivých reziduálů $r_i(a, b)$. Numericky snadno řešitelná se stala až nyní, v době počítačů, metodami přímé minimalizace.

Potíže s neexistencí derivací zmizí při náhradě absolutních hodnot $|r_i|$ čtverci r_i^2,

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - y_i)^2 \longrightarrow \min$$

Parametry a, b lze najít z nutné podmínky pro extrém, tj. anulování prvních derivací

$$\frac{\partial}{\partial a} S(a, b) = 2 \,(\sum_{i=1}^{n} a + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial b} S(a, b) = 2 \,(a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i) = 0.$$

To jsou tzv. *normální rovnice*.

Z předpokladu normality chyb ε_y u y plyne také normalita regresních koeficientů (parametrů) a možnost určit chyby jejich odhadu, tedy přesnost stanovení, na základě rozptylu var $\varepsilon_y = \sigma_y^2$.

Víc o lineární i nelineární regresi, odhadech parametrů, přidružené statistice atd. je uvedeno např. v [2, 3].

•

DISTRIBUCE PRVOČÍSEL

Jak známo, prvočíslo je přirozené číslo dělitelné jen 1 a samým sebou – jinými slovy, prvočíslo má jen triviální dělitele. Např. v první stovce je 25 prvočísel:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Gauss se zabýval výskytem prvočísel už ve škole v letech 1792 nebo 1793.

Množina prvočísel uspořádaná podle velikosti se nejsnadněji získává tzv. *Eratosthenovým sítem*. Jeho ideu předvedeme na množině čísel M = {2, …, 20}. Číslo 2 je dělitelné jen 1 a 2, proto je prvočíslo. V množině M ho necháme, ale vyloučíme všechny jeho další násobky, tedy sudá čísla 4, 6, …, 20:

{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}
{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 }.

Dalším číslem je 3, které je podle definice prvočíslem a zase vyloučíme všechny jeho zbylé liché násobky, tj. 9, 15

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 }

A tím jsme už skončili, protože pro největší prvočíslo p, jehož násobky vylučujeme, musí platit $p \le \sqrt{20} = 4.472\ldots$

Obr. 3 ukazuje počty prvočísel $N(n)$ menších nebo rovných zvolenému číslu n.

V rozsahu do 60 000 je $N(n) \approx n/10$. Ale, jak ukazuje obr. 4, vzdálenost prvočísel se v průměru zvětšuje, takže pro velká n by takový odhad byl hodně nadsazený.

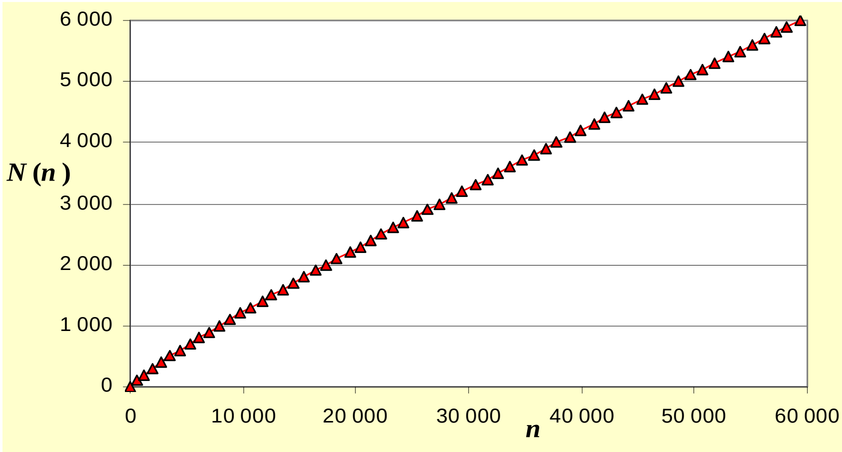
Mnohem lepší odhad navrhl Legendre. Má tvar

$$L(n) = \frac{n}{\ln n - 1.08366...}.$$

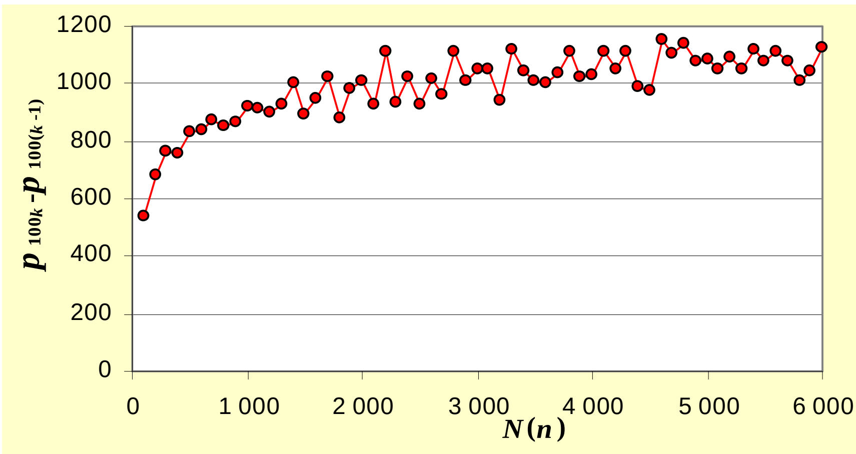
A Gauss objevil odhad, který nepublikoval, ale o kterém se zmiňoval později [4],

$$G(n) = \mathrm{Li}(n) = \int_2^n \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t\,,$$

kde funkce Li je integrální logaritmus.



Obr. 3 – Počty N(n) prvočísel ≤ n, kde n je přirozené číslo < 60 000.



Obr. 4 – Trend vzrůstu rozdílu stých členů v posloupnosti prvočísel uspořádané podle velikosti .

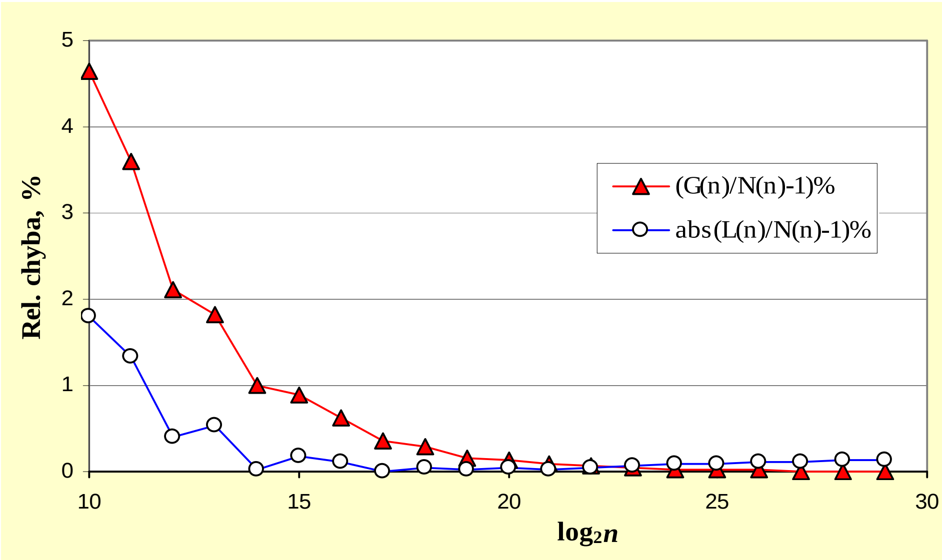
Pro ilustraci Legendreova a Gaussova odhadu $N(n)$ jsme provedli příslušné výpočty pro $n = 2^m$, m= 10, …, 29 a sestrojili obr. 5.

Poznámka. Podle věty o střední hodnotě $\int_2^n \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \frac{n-2}{\ln(\theta n)}$, kde $0 < \theta < 1$. Proto

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Li}(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{\ln(\theta n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} \times \lim_{n\to\infty} \frac{1-2/n}{1+\ln(\theta)/\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\,.$$

A skutečně, *Jacques Hadamard* a *Charlesde la Vallée Poussin* nezávisle dokázali r. 1896 pomocí Riemannovy funkce, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{\frac{n}{\ln n}} = 1 .$$



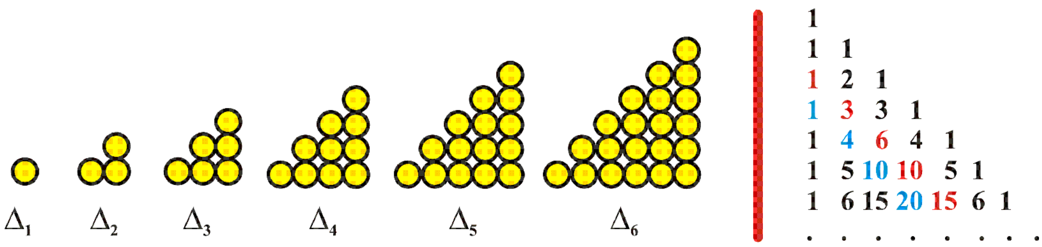
Obr. 5 – Relativní chyby počtu prvočísel N(n) při Gaussově, G(n), a Legendreově , L(n),odhadu.

●

TROJÚHELNÍKOVÁ ČÍSLA

Další Gaussův objev z teorie čísel je vyjádřen v jeho deníku takto: $\boxed{num = \Delta+\Delta+\Delta}$. To značí: každé přirozené číslo lze vyjádřit součtem nejvýš tří trojúhelníkových čísel. Trojúhelníková čísla Δ_n jsou počty kroužků v trojúhelnících na obr. 6. Platí

$$\Delta_n = (n + (n\text{-}1) + \ldots + 1) = (n+1)n/2 = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!} .$$



Obr. 6 – První trojúhelníková čísla.

Trojúhelníková čísla tvoří třetí šikmou linii shora v Pascalově trojúhelníku kombinačních čísel (obr. 6 vpravo). Pod nimi, v další (čtvrté) linii, jsou součty všech trojúhelníkových čísel nad nimi.

Trojúhelníková čísla značí maximální počty různých prvků v symetrické čtvercové matici. Dají se zavést také postupným psaním přirozených čísel do horní nebo dolní trojúhelníkové matice způsobem zřejmým z následujícího schématu:

n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
1	2	4	7	11	16
	3	5	8	12	17
		6	9	13	18
			10	14	19
				15	20
					21

Gaussovo tvrzení ilustruje těchto několik příkladů:

$7 = \Delta_3 + \Delta_1$, $8 = \Delta_3 + \Delta_1 + \Delta_1$, $9 = \Delta_3 + \Delta_2$, $39 = \Delta_7 + \Delta_4 + \Delta_1$ atd.

●

21. srpna 1795 vydal brunšvický vévoda nařízení [1], že z vévodské pokladny se má vyplácet 158 tolarů ročně studentu Gaussovi, který odešel 11. října 1795 studovat do Göttingen na universitu Georgia Augusta. Podle vlastních Gaussových slov odešel do Göttingen proto, že v tamější knihovně bylo velké množství matematické literatury.

Gaussova podpora se v r. 1801 zvýšila na 400 tolarů a 1803 na 600 tolarů.

Universitu Georgia Augusta v Göttingen založil 1737 král Jiří II. Anglický. Tato universita brzy získala pověst jedné z nejlepších německých universit a to patrně platí dodnes. Tehdy 18letý Gauss nastoupil do skvělé intelektuální atmosféry prodchnuté humanitními ideály. Mezi jeho učiteli byl např. fyzik Georg Christoph *Lichtenberg*, jehož humorné ´Večery při svíčce´ vyšly i u nás v době totality [6]. Mezi důvěrné přátele patřil Farkas Wolfgang *Bolyai*, ze staré uherské šlechtické rodiny, který přišel do Göttingen v září 1796. Později napsal:

"… Seznámil jsem se Gaussem, který zde v té době studoval. Dodnes jsme přáteli i když se s ním nemohu srovnávat. Byl velmi skromný a moc se nepředváděl… Celé roky jste s ním mohli být a přitom nepoznat jeho velikost. Jaká škoda, že jsem nepochopil, jak otevřít tuto tichou "knihu bez názvu" a číst z ní. Nevěděl jsem, kolik toho zná, a když viděl můj temperament, vážil si mě, aniž věděl, jak jsem bezvýznamný. Zaujetí pro matematiku (neprojevované navenek) a naše morální shoda nás spojovaly, takže když jsme se procházeli, byli jsme třeba hodiny zticha, každý zaměstnán svými vlastními myšlenkami."

Gauss jednou řekl, že Bolyai byl jediný, kdo uměl proniknout do jeho názorů na základy matematiky.

O svém tehdejším studiu Eulera a Lagrange později Gauss napsal: "Byl jsem povzbuzen jejich svěžím zápalem a sledováním jejich postupů. A utvrdil jsem se ve svém rozhodnutí posunout hranice této široké oblasti vědy dál."

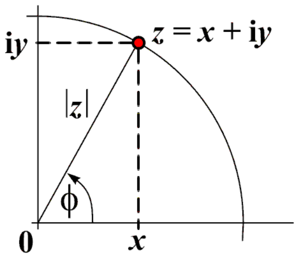
Pak 30. března 1796 tento 19letý student udělal objev, který určil jeho další kariéru. Dokázal, že lze pravítkem a kružítkem, euklidovsky, sestrojit pravidelný 17úhelník [1,4].

●

KOMPLEXNÍ ČÍSLA. KONSTRUKCE MNOHOÚHELNÍKŮ

Komplexní čísla se explicitně objevila v matematice r. 1545 v knize Girolama Cardana *Ars magna* při řešení kubické rovnice. Byla dlouho přijímána jaksi rozpačitě, jako objekty, které někdy existují a jindy ne (G. W. Leibniz). L. Euler zavedl symbol $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ a zjistil také, že řešení rovnice $z^n - 1 = 0$ se dá psát ve tvaru $z = \cos \phi + \mathrm{i} \sin \phi$ [7].

Dnes se komplexní čísla $z = x + \mathrm{i}y$ probírají na středních školách a znázorňují se jako body (x, y) v kartézské soustavě souřadnic: reálné složky $\mathrm{Re}\, z = x$ na horizontální ose a imaginární složky $\mathrm{Im}\, z = y$ na vertikální ose (obr. 7). Rovině komplexních čísel se říká Gaussova rovina, ale v západních zemích také Argandova rovina. Jean Robert *Argand* totiž ideu zobrazení komplexních čísel v rovině publikoval 1806, ale ještě dříve (1799) s ní přišel Caspar *Wessel* (Nor). Termín "komplexní číslo" zavedl teprve Gauss 1831.



Obr. 7 – Zobrazení komplexního čísla $z = x + \mathrm{i}y$ jako bodu (x, y) v kartézské rovině.

Od dob starých Řeků se předpokládalo, že euklidovsky, tj. pravítkem a kružítkem, se dají konstruovat jen pravidelné mnohoúhelníky s počtem stran $p = 2^n$ s $n = 2, 3, \ldots$ a dále $p = 2^n.3, 2^n.5, 2^n.3.5$, kde $n = 0, 1, \ldots$

Při konstrukci pravidelného p-úhelníka jde o rozdělení úhlu 2π na p stejných úhlů $2\pi/p$. To lze převést na algebraickou úlohu řešení rovnice

$$z^p = 1.$$

Platí $|z^p| = |z|^p = 1$, tedy $|z| = 1$. Každé komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je 1, lze psát ve tvaru $z = \cos \phi + \mathrm{i} \sin \phi$. Podle Moivreovy věty je $z^p = \cos (p\phi) + \mathrm{i} \sin (p\phi)$. Z rovnice $z^p = 1 = \cos (p\phi) + \mathrm{i} \sin(p\phi)$ plyne $p\phi = 2k\pi$, kde k je celé číslo. Protože se zajímáme jen o úhly $0 \le \phi < 2\pi$, je $k = 1$ a $\phi = 2\pi/p$. Výpočtem bodů $(\cos (n\phi), \sin(n\phi))$ se v rovině $0xy$ dostanou vrcholy pravidelného p-úhelníka. Jejich spojením přímkami vznikne pravidelný p-úhelník. To dnes umí každý grafický software.

Při euklidovské konstrukci však je k dispozici jen jedna hrana pravítka a kružítko. Tím se možnosti velmi zužují. Uveďme několik příkladů s algebraickou interpretací.

Rovnici $z^p = 1$ dáme tvar $0 = z^p - 1 = (z - 1)(z^{p-1} + z^{p-2} + \ldots + z + 1)$. Triviálním kořenem je $z = 1$. Další kořeny jsou kořeny *reciproké* rovnice $z^{p-1} + z^{p-2} + \ldots + z + 1 = 0$.

Ø Pro $p = 3$ dostáváme rovnici

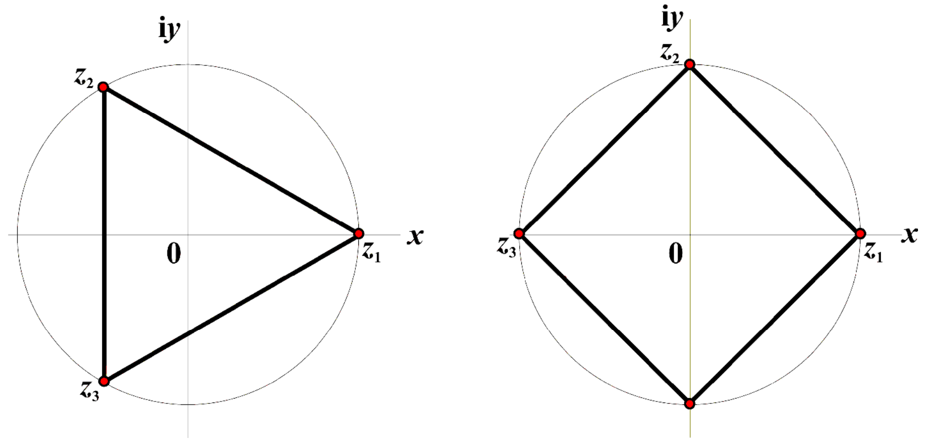
$$0 = z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1),$$

která má kořen $z_1 = 1$ a další dva se najdou řešením kvadratické reciproké rovnice

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Zřejmě $z_{2,3} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Kořeny jsou zakresleny na obr. 8 vlevo.

- Pro $p = 4$ dostáváme rovnici
  $0 = z^4 - 1 = (z-1)(z^3+z^2+z+1) = (z-1)(z+1)(z^2+1) = (z-1)(z-i)(z+1)(z+i)$,
  Znázornění kořenů $z_1 = 1, \ldots, z_4 = -i$ je na obr. 8 vpravo.



Obr. 8– Kořeny rovnice $z^p - 1 = 0$ jako vrcholy pravidelného p-úhelníka pro p = 3, 4.

- Případ $p = 5$ je trochu složitější. Zřejmě

$$0 = z^5 - 1 = (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1).$$

Anulování druhého sčítance vede k reciproké rovnici

$$z^4+z^3+z^2+z+1 = 0.$$

Protože 0 není jejím kořenem, lze ji dělit z^2. Pak

$$z^2 + z + 1 + 1/z + 1/z^2 = (z+1/z)^2 + (z+1/z) - 1 = 0.$$

Substituce $u = z + 1/z$ vede na kvadratickou rovnici

$$u^2 + u - 1 = 0$$

s kořeny $u_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Čtyři kořeny původní rovnice dostaneme řešením 2 rovnic

$z + 1/z = u_{1,2}$, tedy $z^2 - u_{1,2}\, z + 1 = 0$. Zřejmě $z_{2,3,4,5} = \dfrac{u_{1,2}\pm\sqrt{u_{1,2}^2-4}}{2}$.

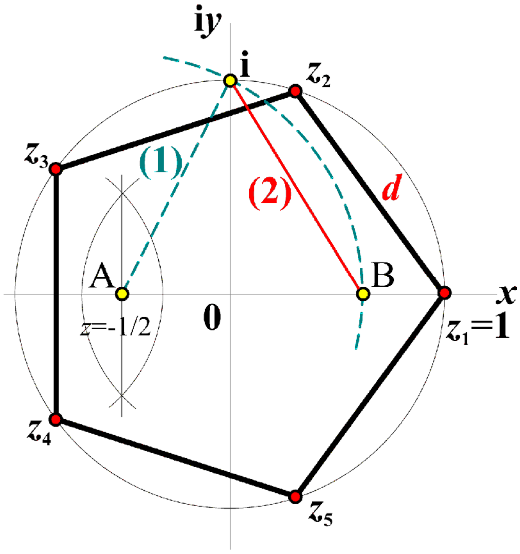
Při geometrické konstrukci potřebujeme znát délku strany, tj. vzdálenost sousedních vrcholů. Bod $z_1 = 1 + i.0$ je výchozí, bod $z_2 = (u_1 + i\sqrt{4-u_1^2})/2$ je sousední ($u_1 = (\sqrt{5}-1)/2$). Délka strany je pak

$$d = \sqrt{(1-\tfrac{u_1}{2})^2 + \tfrac{4-u_1^2}{4}} = \sqrt{\tfrac{(2-u_1)^2+(2-u_1)(2+u_1)}{4}} = \sqrt{2-u_1} = \sqrt{2-\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}} = \sqrt{\tfrac{5-\sqrt{5}}{2}}\ .$$

Kořeny $z^5 = 1$ a euklidovská konstrukce pravidelného pětiúhelníka je na obr. 9.

Poznámka. Numerické hodnoty kořenů u_1, u_2 a $z_2, \ldots, z_4$ lze snadno získat v EXCELu:

$u_1 = (\sqrt{5}-1)/2 = 0.618033989$	$u_2 = -(\sqrt{5}+1)/2 = -1.618033989$
$z_2 = 0.309016994 + 0.951056516\ i$	$z_3 = -0.809016994 + 0.587785252\ i$
$z_4 = -0.809016994 - 0.587785252\ i$	$z_5 = 0.309016994 - 0.951056516\ i$



Obr. 9 – Euklidovská konstrukce pravidelného pětiúhelníka. Úsečka (1) *má délku* $\sqrt{(-\frac{1}{2^2}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Oblouk se středem A a poloměrem (1) *protne osu x v bodě B, jehož spojnice s bodem z = i* (úsečka (2)) *má délku* $\sqrt{((\sqrt{5}-1)/2)^2+1} = \sqrt{10-2\sqrt{5}}\ /2 = \sqrt{(5-\sqrt{5})/2} = d$.

- Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit na 6 rovnostranných trojúhelníků se společným vrcholem. Dvě kolmé přímky protínající se ve středu kružnice protnou obvod kružnice ve vrcholech čtverce a rozpůlením úhlů vznikne pravidelný osmiúhelník.

Gauss publikoval 1801 tvrzení: je-li p Fermatovo číslo, tedy

$$p = 2^{2^m} + 1, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

dá se euklidovsky konstruovat pravidelný p-úhelník [1,4,8]. Jinými slovy: reciproká rovnice stupně $p - 1 = 2^{2^m}$ vede na postupné řešení kvadratických rovnic. To jsme viděli na $m = 0, 1$ u pravidelného trojúhelníka a pětiúhelníka. Euklidovskou konstrukci těchto dvou mnohoúhelníků se učí žáci na základní škole.

Pro $m = 2$ dostaneme $p = 17$. To byl naprosto nečekaný objev. Sám Gauss ho považoval za tak významný, že si přál mít pravidelný 17-úhelník vytesán na náhrobku. Kameník to ale odmítl s tím, že mnohoúhelník s tolika stranami se při běžném pohledu neodliší od kružnice. Ale $p = 17$ se přece jen uplatnilo v podobě 17cípé hvězdy na podstavci památníku, který Gaussovi postavili v rodném Braunschweigu.

Možnost euklidovské konstrukce 17-úhelníka ukazuje vzorec [11,12]

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2(17-\sqrt{17})}-2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}\right),$$

který Gauss uveřejnil 1801 v knize *Disquisitiones arithmeticae*.

Prvočíslo $p = 7$ není Fermatovo. Vrcholy 7-úhelníka dostaneme z rovnice

$$0 = z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$

Ale stupeň polynomu $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ není mocninou 2. To tedy znamená [8], že sedmiúhelník euklidovsky sestrojit nelze. Kořeny rovnice

$$0 = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = z^3\,(z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3})$$

lze samozřejmě s libovolnou přesností aproximovat numericky.

●

O algebraické interpretaci euklidovských konstrukcí je více uvedeno na konci knihy [8]. Euklidovská konstrukce pravidelného 17úhelníka je popsána v [11,12].

Pro úplnost uvádíme, že všechna známá Fermatova prvočísla jsou

m	0	1	2	3	4
$2^{2^m} + 1$	3	5	17	257	65 537

Poznámka. Uveďme ještě pár slov k Fermatovým číslům $F_m = 2^{2^m} + 1$. $F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$, ale toto číslo, jak dokázal už Euler 1732, je dělitelné 641 [8-10]. Podobně $F_6 = 2^{2^6} + 1 = 2^{64} + 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,617$ je složené (Landru, 1880) [8]. Také pro m = 7, 8, 9, 10, 11 jsou F_m složená čísla. A dosud (2009) nevíme, je-li Fermatových prvočísel víc než uvedených 5. Velká Fermatova čísla se využívají při šifrování.

ZÁKLADNÍ VĚTA ALGEBRY

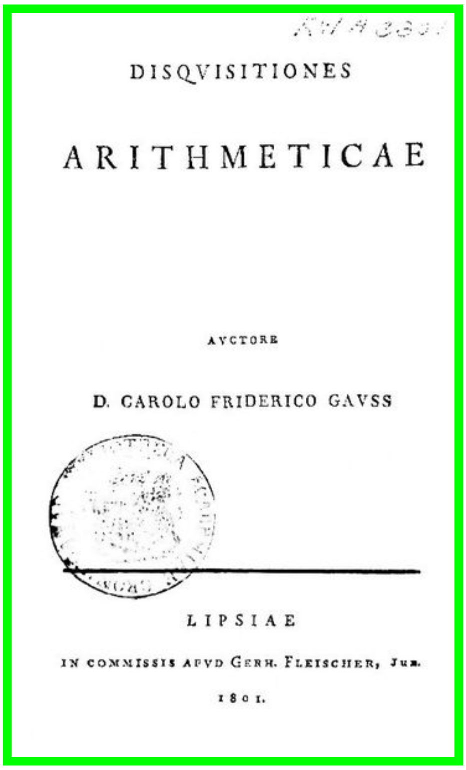
Gauss napsal svou doktorskou *disertaci* 1799 pod formálním vedením Johanna Friedricha Pfaffa z university v Helmstedtu. Tématem disertace byl důkaz tzv. *základní věty algebry*: každý polynom kladného stupně nad tělesem komplexních čísel má aspoň jeden komplexní kořen.

Název disertace zněl: *Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. (Nový důkaz věty, že každá celá racionální funkce jedné proměnné se dá rozložit na součin faktorů prvního a druhého stupně). Na universitě v Helmstedtu mu pak byl bez obvyklé ústní zkoušky 16. června 1799 udělen titul doktora filosofie (PhDr.). Knižní vydání disertace financoval brunšvický kníže. V důkaze ale byly logické mezery. Gauss se k základní větě algebry vracel a dokázal ji různými způsoby ještě třikrát [5,12-15].

Poznámka. Jeden krátký důkaz této věty (na 3 řádcích) je založen na Liouvilleově větě z teorie funkcí komplexní proměnné [2]. Podobně krátkých důkazů založených na různých principech je dnes známo víc.

TEORIE ČÍSEL - ALGEBRA

Svou první číselně teoretickou práci z r. 1798 publikoval Gauss v r. 1801 v knize *Disquisitiones arithmeticae*. V ní vytvořil moderní přesný matematický styl. Obsahuje tzv. *základní větu aritmetiky*: každé celé n lze jednoznačně rozložit na součin mocnin prvočísel. Dále je v ní nová algebra kongruencí. Pro kongruence zavedl symbol $\equiv$ a zápis $a \equiv b \pmod{m}$ používaný od těch dob, znamená, že $(a-b)$ je dělitelné m.


DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, Jun.

1801.

Titulní strana Disquisitiones.

Na *kongruence* narazili matematici již před Gaussem, např. malá Fermatova věta říká:

je-li p prvočíslo, je $m^p \equiv m \pmod{p}$.

Tuto větu zobecnil již L. Euler [8]. Striktní teorii kongruencí vytvořil však Gauss.

Kniha *Disquisitiones arithmeticae* začíná věnováním, z něhož jen pro přiblížení tehdejší doby a situace uvádíme první věty:

Nejjasnějšímu knížeti a pánu
Karlu Vilému Ferdinandovi,
vévodovi Brunšviku a
Lüneburgu

Nejjasnější kníže,
považuji za své největší štěstí, že mohu tuto svou práci ozdobit Vaším nejctěnějším jménem. Věnuji Vám ji jako posvátný projev mé synovské oddanosti. Kdyby nebylo Vaší přízně, nejjasnější kníže, nikdy bych se nemohl seznámit s vědou…

Gauss řekl: *Matematika je královnou věd a teorie čísel je královnou matematiky*.

Knihu *Disquisitiones arithmeticae* (Pojednání o aritmetice) navrhl vydavatel napsat v latině, aby se tak stala přístupnou pro větší počet vzdělanců. Gauss ovládal latinu tak dobře, že podle Moritze Cantora by ani Cicero v textu nic neupravoval (kdyby ovšem znal matematiku). Přesto právě kvůli matematickému vyjadřování vznikly určité problémy s korekturami. Zádrhelem bylo např. slovo algoritmus [1].

Lagrange, kterého Napoleon nazval vysokou pyramidou matematiky, po přečtení Disquisitiones napsal mladému učenci: “Vaše Disquisitiones Vás jedním rázem vynesly mezi nejpřednější matematiky a poslední kapitolu (teorie dělení kružnice pro konstrukci mnohoúhelníků) hodnotím jako nejkrásnější analytický objev po dlouhém čase.“

O Laplaceovi, autoru *Méchanique céleste*, před nímž se v úctě skláněl každý člen francouzské akademie, se říká, že zvolal: “Brunšvický kníže objevil ve své zemi víc než planetu: nadhvězdného ducha v lidském těle!“ To se stalo brzo potom, co Gauss zveřejnil svůj první důležitý astronomický příspěvek. Několik let později Laplace žádal Napoleona, aby jeho vojska při tažení ušetřila universitní město Göttingen, protože “tam žije nejvýznamnější matematik.“

Zajímavé je také Gaussovo vlastní mínění: “Disqusitiones patří už historii a v novém vydání, proti němuž bych nebyl, ale do něhož teď vůbec nemám chuť, bych neměnil nic s výjimkou oprav chyb. Jen bych přidal osmou kapitolu, která v době vydání byla v podstatě hotová, ale nebyla už vytištěna, aby příliš nevzrostly náklady s tiskem.“ Práce zamýšlené 8. kapitoly vyšly v periodických časopisech university.

Kompletní seznam Gaussových prací bez knižních publikací čítá 124 položek. Je zvláštní, že Gauss napsal jen málo prací čistě algebraického charakteru.

●

CERES

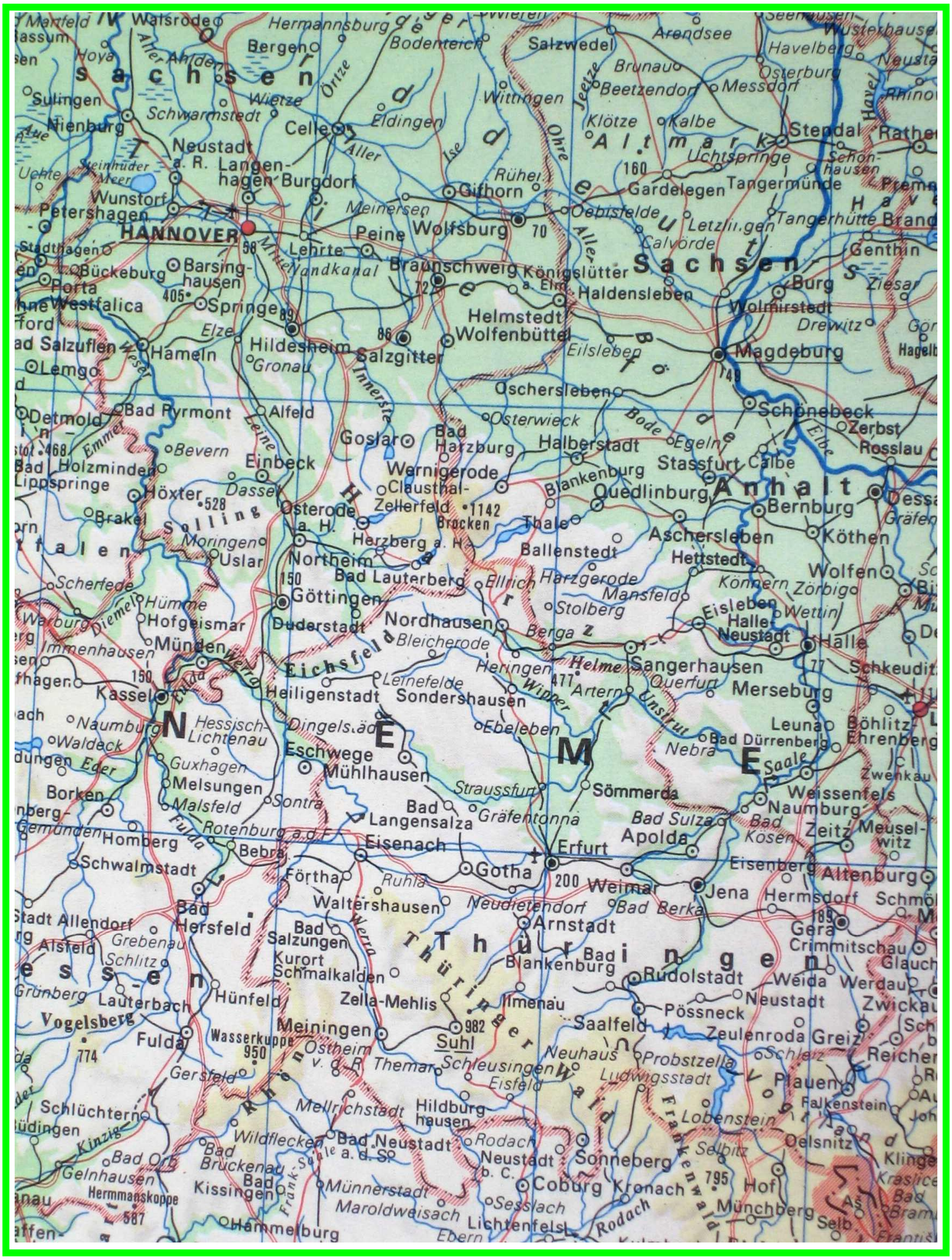
Planetku Ceres objevil 1. ledna 1801 *Giuseppe Piazzi* z Palerma. Zpráva o tom se dostala do Německa až téměř po půl roce. Piazzi mohl planetku pozorovat jen do 11. února, protože pak tomu bránilo Slunce. O svém objevu a dalších pozorováních Piazzi napsal krátké sdělení. V něm uvedl výpočet kruhové dráhy a výpočty dalších astronomů, v dodatku pak opravený seznam vlastních pozorování. Výpočty ukázaly, že dráha Ceres není parabolická a musí tedy být eliptická. Mezitím Gauss, který dostal v Braunschweigu časopis Monatliche Correspondenz s těmito informacemi, přerušil své matematické bádání a začal se sám zabývat výpočtem dráhy Ceres. Podle záznamů 119 a 120 v jeho deníku vypracoval v září a říjnu 1801 novou praktickou metodu výpočtu. Systematicky hledal orbitu, která nejlíp vyhovuje naměřeným hodnotám. Bylo potřebné najít řešení co nejdřív, aby planetka mohla být na obloze znovu nalezena.

Gauss využil nástrojů projektivní geometrie a metody nejmenších čtverců. Po obtížných výpočtech nalezl ze tří bodů orbitální elipsu planetky [1,18]. Vypočetl efemeridy Ceres po 6 dnech, od 25.11. do 31.12.1801. Podle nich *F. X. von Zach* (Gotha) planetku Ceres v noci 7. prosince 1801 skutečně našel. 1. ledna 1802 ji našel znovu a nezávisle také *W. Olbers* (Bremen), který později objevil další planetky. Oba o tom napsali Gaussovi a mezi Olbersem a Gaussem se potom rozvinula trvalá korespondence.

Výpočet dráhy planetky Ceres a zveřejnění těchto událostí představilo Gausse jako teoretického astronoma nejvyšší třídy. Byl schopen vypočíst dráhu komety za 1 hodinu, což Eulerovi starými metodami trvalo 3 dny. Roku 1806 byl Gauss jmenován profesorem astronomie a ředitelem astronomické observatoře university v Göttingen. Funkci ředitele hvězdárny pak zastával až do konce života.

Astronomické výpočty kromě analytických a geometrických nástrojů vyžadují numerické metody. Gauss byl skvělý počtář a nedělal chyby. Kromě toho byl nesmírně vynalézavý a obohatil každou oblast, v níž musel řešit nějaký problém. Pro výpočet orbit planet vzal např. za jednotku délky vzdálenost Země – Slunce, 1 AU. Problémy se snažil vždy řešit úplně, takže jeho průkopnické práce vytvořily základ několika disciplin. Pokusíme se nastínit podstatu některých jeho metod.

●



Část Německa nejvíc spojená s Gaussovým životem.

NUMERICKÉ METODY

■ *Gaussova eliminační metoda*

Idea řešení systému lineárních rovnic eliminací pochází z 2. stol. před n.l. Řešení soustavy lineárních rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

nebo maticově

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

je dnes běžnou záležitostí. Např. v Excelu se zadá matice **A**, vytvoří se inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a tou se zleva vynásobí vektor **b**, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

To je ovšem podmíněno regularitou matice **A**, tj. lineární nezávislostí jejích řádků $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n \neq \mathbf{0}$. Regularita **A** se nemění lineárními operacemi s řádky, tj. násobením řádků nenulovými čísly a sčítáním [21].

Gauss formuloval algoritmus, který převede matici **A** rozšířenou o vektor (matici) pravých stran **b** na horní trojúhelníkovou matici (tj. s nulami pod diagonálou) lineárními ekvivalentními úpravami [21]. Řešme systém 4 lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & 11 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 \end{pmatrix}.$$

První řádek necháme beze změn, druhý řádek násobíme 2, sečteme s prvním a výsledky píšeme místo druhého řádku. Symbolický zápis: $\mathbf{r}_2{\times}2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2$. Pak od třetího řádku odečteme druhý a výsledky píšeme na třetí řádek, $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_3$. Na čtvrtý řádek napíšeme čtvrtý řádek plus třetí řádek, $\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_2$. Protože na 3. řádku dostaneme jen sudá čísla, vydělíme jej 2. Takže

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & 11 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & 29 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 17 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & 29 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 17 \end{array}\right).$$

Úpravami $\mathbf{r}_3{\times}7 + \mathbf{r}_2{\times}\mathbf{2} \to \mathbf{r}_3$ a $\mathbf{r}_4{\times}2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_4$ a následným dělením 3 dostaneme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & 29 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 17 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & 29 \\ 0 & 0 & 9 & 6 & 51 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 33 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 7 & 1 & 4 & 33 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right).$$

Operací $\mathbf{r}_4\times 3 - \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_4$ a dělením nového řádku $\mathbf{r}_4$ získáme horní trojúhelníkovou matici ekvivalentní původní $\mathbf{A}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 7 & 1 & 4 & 33 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 7 & 1 & 4 & 33 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 7 & 1 & 4 & 33 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Dosavadní postup je tzv. *přímý chod* Gaussovy eliminace. Při *zpětném* chodu přejde trojúhelníková matice v jednotkovou a vektor (matice) pravých stran v (matici) řešení $\mathbf{x}$.

Zpětný chod se při ručním počítání obvykle už neprovádí a neznámé se vypočtou přímo. V našem případě je na čtvrtém řádku $x_4 = 4$. Třetí řádek je $3x_3 + 2x_4 = 17$, tj. $x_3 = (17 - 2x_4)/3 = 3$. Z druhého řádku plyne $x_2 = (33 - 4x_4 - x_3)/7 = (33 - 4\times 4 - 3)/7 = 14/7 = 2$. Z prvního řádku dostaneme $x_1 = (11 - 2x_4 - x_3 + x_2)/2 = (11 - 8 - 3 + 2)/2 = 1$.

U malých soustav je přímý výpočet v Excelu samozřejmě výhodnější:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & -1/3 & -1/6 \\ 1/6 & 1/3 & -1/6 & -1/6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/6 & -1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Gauss zavedl pojem *determinant*, stěžejní pojem lineární algebry. Např. v našem případě je det $\mathbf{A} = 36$, det $\mathbf{A}^{-1} = 1/36 = 0.027777...$ Čtvercová matice $n\times n$ tvořená n vektory řádků a sloupců je regulární, právě když determinant této matice je nenulový.

Předvedený postup řešení rovnice $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ patří mezi tzv. finitní metody. Lze ho použít k manuálnímu výpočtu inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$(místo $\mathbf{b}$ zaujme jednotková matice).

Když matice $\mathbf{A}$ je hodně velká, objeví se problém úspory počtu operací. Výhodnější pak je *iterační* řešení, při němž se vyjde z nějakého odhadu řešení $\mathbf{x}_0$ a jen násobením a sčítáním matic se vytváří posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$, která za určitých podmínek konverguje k řešení $\mathbf{x}$. Je to např. tehdy, když ve všech řádcích jsou prvky na diagonále dominantní, tj. $0 \le |a_{ik}| < |a_{ii}|$ pro $k \ne i$, kde $i, k = 1, \ldots, n$. V našem příkladě dělením diagonálními elementy upravíme rovnici $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ na $\mathbf{x} + \mathbf{Bx} = \mathbf{c}$, kde $\mathbf{B} = (a_{ik}/a_{ii} - 1)$, $c_i = b_i/a_{ii}$, $i, k = 1, \ldots, n$, $k \ne i$. Teď lze definovat *metodu prosté iterace* vztahem:

$$\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{c} - \mathbf{B}\mathbf{x}_r,\ r = 0, 1, \ldots$$

Tyto úpravy a další výpočty můžeme snadno dělat v Excelu násobením matic. Tak s výše uvedenou maticí $\mathbf{A}$ dostaneme

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2.75 \\ 4.5 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Zvolme } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Další iterace (získané v Excelu prostým kopírováním) jsou

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 2.5 \\ 4 \\ 3.25 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1.125 \\ 2.125 \\ 3.250 \\ 4.375 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 0.98425 \\ 1.98425 \\ 2.96875 \\ 3.95125 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}_{12} = \begin{pmatrix} 0.99976 \\ 1.99976 \\ 2.99951 \\ 3.99927 \end{pmatrix}, \ldots$$

Jednou z mnoha dalších iteračních metod je *Gaussova-Seidelova metoda*. Její ideou je použít při výpočtu *i*té složky $\mathbf{x}_r$ už vypočtených a tedy přesnějších i–1 složek $\mathbf{x}_r$. Podrobnější výklad a podmínky konvergence lze najít v literatuře o numerických metodách, např. [21], na internetu atd.

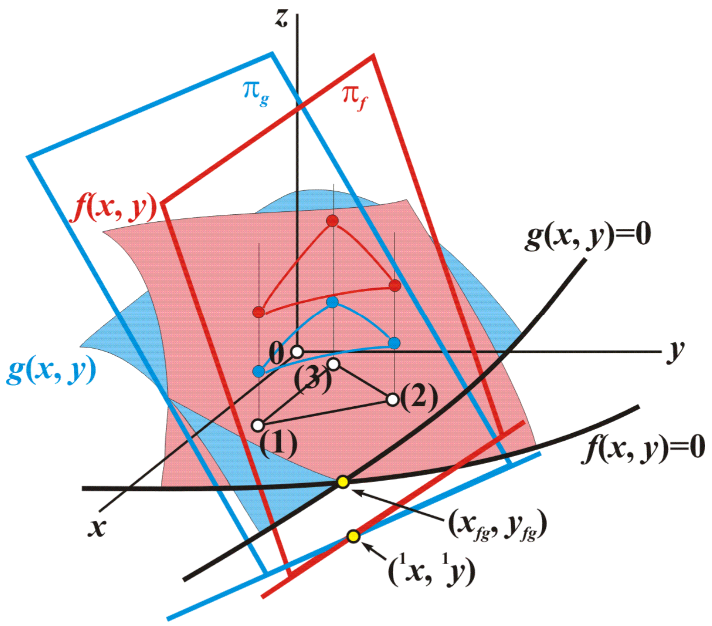
●

■ ***Řešení soustavy dvou nelineárních rovnic***

Gaussův algoritmus řešení soustavy nelineárních rovnic

$$f(x, y) = 0,$$
$$g(x, y) = 0,$$

představuje dvojrozměrnou podobu metody sečen pro řešení jedné rovnice $h(x) = 0$ [2]. Vychází z předpokladu, že funkce f a g jsou definovány v dostatečně velké oblasti roviny $0xy$, popř. v celé rovině. Rovnice $f(x, y) = 0$ definuje průsečnici grafu funkce f s rovinou $0xy$, tedy křivku v této rovině. Rovnice $g(x, y) = 0$ definuje druhou průsečnici. Předpokládáme, že obě tyto rovinné křivky se protínají v nějakém bodě (x_{fg}, y_{fg}), který máme najít. V rovině $0xy$ zvolíme trojúhelník s vrcholy (1) = (x_1, y_1), (2) = (x_2, y_2), (3) = (x_3, y_3). Jim odpovídají dvě trojice bodů $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$, $(x_i, y_i, g(x_i, y_i))$, $i = 1, 2, 3$. Ty definují dvě roviny π_f, π_g protínající rovinu $0xy$ ve dvou přímkách, o nichž samozřejmě předpokládáme, že jsou různoběžné a mají tedy průsečík $({}^1x, {}^1y)$. Pokud jsme trojúhelník (1)(2)(3) volili šťastně, bude $({}^1x, {}^1y)$ ležet blíže řešení (x_{fg}, y_{fg}). Přesnost iterace lze testovat odchylkou ${}^1\delta = \sqrt{f^2({}^1x, {}^1y) + g^2({}^1x, {}^1y)}$ (popř. veličinou ${}^1\delta = \max\{|{}^1x_j - {}^1x_k|, |{}^1y_j - {}^1y_k| \; : \; j, k = 1, 2, 3\}$ apod.). Trojúhelník (1)(2)(3) můžeme také volit tak, aby funkce f a g měnily ve vrcholech znaménka. Odchylka má být menší než



Obr. 10 – Náčrt iterace při řešení soustavy $f(x, y) = g(x, y) = 0$ *Gaussovou metodou.*

předepsaná přesnost ε. Není-li tato podmínka splněna, nahradí nový bod (^1x, ^1y) ten bod trojúhelníka (1)(2)(3), v němž je zvolená odchylka největší, a krok se zopakuje. Pro názornost je jeden krok metody uveden graficky na obr. 10. Podrobnější výklad je v [22].

Gaussovu metodu nejlíp osvětlí příklad. Řešme soustavu rovnic

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) = 0,$$
$$g(x, y) = x^2 - 2y = 0\ .$$

V tomto jednoduchém případě z druhé rovnice plyne $y = x^2/2$, což po dosazení do první rovnice dá rovnici o jedné neznámé x: $\cos(x^2 + x^4/4) = 0$, tedy $x^2 + x^4/4 = (k+1/2)\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Omezíme se na 1. kvadrant roviny $0xy$ ($x, y > 0$), tj. $k = 0$. Pak $x^4 + 4x^2 - \pi/2 = 0$ a $(x^2)_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+2\pi}$. Zajímáme se jen o kladné kořeny, tedy $(x^2)_1 = \sqrt{4+2\pi} - 2$. Odtud (zase jen kladný kořen) $x_1 = \sqrt{(x^2)_1} = 1.098517457717\ldots$ a dále $y_1 = 0.603370302455\ldots$

Algoritmus Gaussovy metody.

Zvolíme trojúhelníka, v němž očekáváme nulový bod obou funkcí, třeba vrcholy $(x_1, y_1) = (0.5, 0.5)$, $(x_2, y_2) = (1.5, 0.5)$, $(x_3, y_3) = (1.5, 1.0)$ a vypočteme

$f_1 = f(x_1, y_1) = 1.75516512$, $g_1 = g(x_1, y_1) = -0.75$, $\delta_1 = \sqrt{f_1^{\,2} + g_1^{\,2}} = 1.9087$,

$f_2 = f(x_2, y_2) = -1.6022872$, $g_2 = g(x_2, y_2) = 1.25$, $\delta_2 = \sqrt{f_2^{\,2} + g_2^{\,2}} = 2.0322$,

$f_3 = f(x_3, y_3) = -1.98825935$, $g_3 = g(x_3, y_3) = 0.75$, $\delta_3 = \sqrt{f_3^{\,2} + g_3^{\,2}} = 2.0039$,

Roviny určené body (x_1, y_1, f_1), (x_2, y_2, f_2), (x_3, y_3, f_3) a (x_1, y_1, g_1), (x_2, y_2, g_2), (x_3, y_3, g_3) protínají rovinu $0xy$ ve dvou různoběžkách, jejichž průsečík (^1x, ^1y) se najde následovně.

Iterační krok:

Vypočteme $d_1 = (f_2g_3 - f_3g_2)$, $d_2 = (f_1g_3 - f_3g_1)$, $d_3 = (f_1g_2 - f_2g_1)$,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & f_1 & g_1 \\ 1 & f_2 & g_2 \\ 1 & f_3 & g_3 \end{vmatrix} = d_1 - d_2 + d_3 = 4.129396597,$$

$$D_f = \begin{vmatrix} x_1 & f_1 & g_1 \\ x_2 & f_2 & g_2 \\ x_3 & f_3 & g_3 \end{vmatrix} = x_1d_1 - x_2d_2 + x_3\,d_3 = 4.109342513,$$

$$D_g = \begin{vmatrix} y_1 & f_1 & g_1 \\ y_2 & f_2 & g_2 \\ y_3 & f_3 & g_3 \end{vmatrix} = y_1d_1 - y_2d_2 + y_3\,d_3 = 2.560818789,$$

$$^1x = \frac{D_f}{D} = 0.99514358, \qquad ^1y = \frac{D_g}{D} = 0.62014358,$$

$^1f = f(^1x, {}^1y) = 0.3893136$, $^1g = g(^1x, {}^1y) = -0.2499764$, $^1\delta = \sqrt{f_1^2 + g_1^2} = 0.462659$.

Nový bod (^1x, ^1y) nahradí (x_2, y_2) s největší normou chyby δ_2, ^1f, ^1g nahradí f_2, g_2.

Iterace se opakuje, dokud norma chyb $^i\delta$ není menší než zvolená přesnost ε.

Předvedený výpočet byl proveden v Excelu. Stačí zadat první krok a další se s nutnými substitucemi jen kopírují.

Výsledky prvního a dalších kroků ukazuje následující tabulka.

iterace i	x_i	y_i	${}^if = f(x_i, y_i)$	${}^ig = g(x_i, y_i)$	${}^i\delta$
1	0.99514358	0.62014358	0.389313555	-0.249976415	0.46265889
2	1.23984931	0.60486657	-0.652423930	0.327493161	0.73000600
3	1.06343131	0.59580705	0.169644178	-0.060727935	0.18018610
4	1.09504325	0.60374291	0.014342087	-0.008366110	0.01660383
5	1.09868516	0.60338579	-0.000774322	0.000337490	0.00084467
6	1.09851557	0.60337016	0.000008633	-0.000003847	0.00000945
7	1.09851746	0.60337030	-3.7708E-10	1.83029E-10	4.19153E-10

Přesnost dosažená v 7. kroku obvykle stačí a tak výpočet ukončíme.

●

■ ***Gaussovy interpolační polynomy***

Mějme v rovině množinu tzv. interpolačních uzlů $\{(x_i, y_i): i = 0, 1, \ldots, n\}$. Při interpolaci se sestrojí polynom $P(x)$ stupně n takový, že $P(x_i) = y_i$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$. To lze udělat mnoha způsoby. Nejpřirozenější je konstrukce *Lagrangeova polynomu*. Volíme $L(x) = p_0(x)\, y_0 + \ldots + p_n(x)\, y_n$. Aby mohlo platit $P(x_i) = y_i$, musí být $p_i(x_i) = 1$. Toho se dosáhne násobením n faktorů $(x–x_k)/(x_i–x_k)$, $k \neq i$, $k = 0, \ldots, n$. Tedy explicitně

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}\, y_0 + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\, y_n .$$

Výhodou Lagrangeova polynomu je obecnost ve vzdálenostech uzlů, nevýhodou je výpočetní pracnost. Interpolace se značně zjednoduší u ekvidistantních uzlů interpolace, tj. když $x_{i+1} = x_i + h$, $h > 0$. Pak lze sestavit tabulku diferencí $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta\, y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$, … Po zavedení nové proměnné $q = (x - x_0)/h$ můžeme pracovat např. s Newtonovým polynomem (pro interpolaci vpřed)

$$N(x) = y_0 + \Delta y_0\, q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}\, q(q–1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}\, q(q–1) \ldots (q–n+1).$$

Formální podobnost s Taylorovým rozvojem může být ještě víc zřejmá, definujeme-li ${}^kq = q(q–1) \ldots (q–k+1)$, $k = 1, 2, \ldots$:

$$N(x) = y_0 + \Delta y_0\, {}^1q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}\, {}^2q + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}\, {}^nq.$$

Gauss využil diferencí vpřed i vzad a sestavil dvě interpolační formule. Lze je najít v obou knihách [21] a dalších knihách o numerické matematice. Dnes význam interpolace mezi hodnotami z tabulek nebo výsledků pracných výpočtů značně poklesla. Interpolační polynomy tvoří spíš základ jiných numerických metod, např. integrace.

●

■ *Gaussova numerická integrace (kvadratura)*

Omezíme se na funkce dostatečně hladké na intervalu $[a, b]$, tj. s derivacemi dostatečně vysokého řádu. Principem numerické integrace je náhrada integrované funkce vhodným polynomem, popř. kombinací polynomů nízkého řádu, které se integrují velmi snadno.

Bez velké teorie odvodíme 3-uzlovou Gaussovu kvadraturní formuli. Substitucí

$$x(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,t$$

převedeme interval $[a, b]$ na $[-1, 1]$ a funkci f nahradíme interpolačním polynomem P

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(x(t))\,\mathrm{d}t \approx \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Budeme hledat uzly t_i a koeficienty A_i kvadraturní formule nejvyšší přesnosti

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = A_{-1}P(t_{-1}) + A_0P(t_0) + A_1P(t_1)\,,$$

tj. přesné pro polynomy co nejvyššího stupně. Protože pro lichá s, $s = 1, 3, 5, \ldots$

$$\int_{-1}^{1} t^s\,\mathrm{d}t = \frac{t^{s+1}}{s+1}\Big|_{-1}^{1} = 0\,,$$

můžeme pracovat jen se sudými s. Budeme-li požadovat symetrii uzlů, tj. $t_{-1} = -t_1$, $t_0 = 0$ a koeficientů, $A_{-1} = A_1$, stačí pro určení tří neznámých A_0, A_1, t_1 první tři integrály:

$$\int_{-1}^{1} t^0\,\mathrm{d}t = A_0 + 2A_1 = 2,$$

$$\int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = A_{-1}\,t_{-1}^{\,2} + A_1\,t_1^{\,2} = 2A_1\,t_1^{\,2} = 2/3,$$

$$\int_{-1}^{1} t^4\,\mathrm{d}t = A_{-1}\,t_{-1}^{\,4} + A_1\,t_1^{\,4} = 2A_1\,t_1^{\,4} = 2/5.$$

Nelinearita tohoto systému je sice komplikací, ale tu vyváží požadovaná symetrie. Dělením poslední rovnice prostřední dostaneme $t_1^{\,2} = 3/5$ a $t_1 = \sqrt{3/5} \approx 0.774597$. Z druhé rovnice pak plyne $A_1 = 1/(3\,t_1^{\,2}) = 5/9$ a z první $A_0 = 2 - 2A_1 = 8/9$. Takže

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\,[5P(-\sqrt{(3/5)}\,) + 8P(0) + 5P(\sqrt{(3/5)}\,)] \qquad \text{a obecně}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{18}\left[5f\Big(a+\frac{(b-a)(1-\sqrt{0.6})}{2}\Big) + 8f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + 5f\Big(b-\frac{(b-a)(1-\sqrt{0.6})}{2}\Big)\right].$$

Poznámka. Předvedené odvození Gaussovy 3-uzlové integrační formule je sice jednoduché, ale neukazuje hlavní ideu Gaussovy integrace. Tou je využití ortogonálních polynomů $P_k(t)$, tedy takových, že $\int_{-1}^{1} P_i(t)\,P_k(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pro $i \neq k$. Zřejmě $P_0 = 1$ a $P_1 = t$ jsou ortogonální na $[-1, 1]$. Koeficienty kvadratického polynomu $P_2(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$ ortogonálního k P_0 a P_1 musí splňovat rovnice

$$\int_{-1}^{1} P_2(t)\, P_0(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (\, a_2t^2 + a_1 + a_0) = (2/3)\, a_2 + 2a_0 = 2(a_2/3 + a_0) = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} P_2(t)\, P_1(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (\, a_2t^3 + a_1t^2 + a_0t) = (2/3)\, a_1 = 0,$$

tedy $P_2(t) = a_2t^{\,2} + a_0 = -3a_0\, t^{\,2} + a_0 = a_0\,(-3t^{\,2} + 1)$. Můžeme požadovat, aby $P_k\,(1) = 1$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ Pak z $P_2(1) = a_0(-3\times1^2 + 1) = -2\, a_0 = 1$ plyne $a_0 = -1/2$ a $P_2(t) = (3\, t^2-1)/2$. Podobným způsobem najdeme koeficienty kubického polynomu $P_3(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ ortogonálního k P_0, P_1 a P_2:

$$\int_{-1}^{1} P_3(t)\, P_0(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (\, a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0)\, \mathrm{d}t = (2/3)\, a_2 + 2a_0 = 2(a_2/3 + a_0) = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} P_3(t)\, P_1(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (\, a_3t^4 + a_2t^3 + a_1t^2 + a_0t)\, \mathrm{d}t = 2(a_3/5 + a_1/3) = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} P_3(t)\, P_2(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}[3\int_{-1}^{1} (\, a_3t^5 + a_2t^4 + a_1t^3 + a_0t^2)\, \mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} P_3(t)\, P_0(t)\, \mathrm{d}t\,]$$

$$= \frac{1}{2}\,(6a_2/5 + 6a_0/3 - 2a_2/3 - 2a_0) = \frac{1}{2}\,(6a_2/5 + 6a_0/3 - 2a_2/3 - 2a_0) = (3/5 - 1/3)\, a_2 = 0,$$

takže $a_2 = 0$, $a_0 = 0$ a $a_1 = -3a_3/5$. Pak $P_3(t) = a_3t^3 - a_1t = t\, a_3\, (t^2 - 3/5)$. Z požadavku $P_3(1) = 1$ plyne $a_3 = 5/2$, tedy $P_3(t) = (5/2)\, t\, (t^2 - 3/5)$. Je vidět, že kořeny $P_3(t)$ jsou právě t_{-1}, t_0, t_1 už odvozené Gaussovy 3-uzlové integrační formule. Uzly dalších Gaussových formulí s jinými počty bodů jsou kořeny takto definovaných polynomů $P_k(t)$, tzv. Legendreových polynomů [21,23]. Pro úplnost uvedeme prvních šest $P_k(t)$.

$P_0(t) = 1$	$P_3(t) = (5/2)\, t\, (t^2 - 3/5)$
$P_1(t) = t$	$P_4(t) = (35t^4 - 30t^2 + 3)/8$
$P_2(t) = (3\, t^2-1)/2$	$P_5(t) = t\, (63t^4 - 70t^2 + 15)/8$

Víc o numerické integraci je v [2] nebo [21] a dalších učebnicích numerických metod.

Při numerickém výpočtu integrálu nejde jen o to získat nějakou přibližnou hodnotu, ale je žádoucí znát přesnost. Odhad chyby se jednoduše získá půlením intervalu. Je-li G_1 hodnota získaná podle 3-uzlové Gaussovy formule pro interval $[a,\, b]$ a G_2 součet výsledků této formule na intervalech $[a,\, \frac{a+b}{2}]$ a $[\frac{a+b}{2},\, b]$, je chyba menší než $|G_2 - G_1|$. Číslo $G_{12} = \mathrm{G2} + \frac{G_2 - G_1}{63}$ je přesnější odhad integrálu (Richardsonova extrapolace) [2, 21].

Příklad. Počítejme integrál $I = \int_0^2 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$. Primitivní funkce k $\sqrt{x}$ je $\frac{2}{3}\, x^{3/2}$, proto $I = \frac{2}{3}\, 2^{3/2} =$ 1.885 618. Výpočty 3-uzlovou Gaussovou formulí pro interval [0, 2] jsou v následující tabulce.

t_i	$\sqrt{t_i}$	A_i	$A_i\sqrt{t_i}$	t_i	$\sqrt{t_i}$	A_i	$A_i\sqrt{t_i}$
0.225403	0.474767	5	2.373833	0.112702	0.335711	5	1.678553
1	1	8	8	0.5	0.707107	8	5.656854
1.774597	1.332140	5	6.660699	0.887298	0.941965	5	4.709826
				1.112702	1.054847	5	5.274234
				1.5	1.224745	8	9.797959
				1.887298	1.373790	5	6.868949
		$G_1 =$	**1.892726**			$G_2 =$	**1.888132**

Richardsonovou extrapolací dostaneme $G_{12} = G_2 + (G_2 - G_1)/63 = 1.888\ 059$. Relativní chyba je $|1 - G_{12}/I| \times 100 = 0.129\%$.

Pokud bychom chtěli dosáhnout přesnosti třeba $\varepsilon = 5\times10^{-6}$, mohli bychom použít Gaussovu formuli v intervalech [0, 0.5], [0.5, 1], [1, 1.5], [1.5, 2]. Dostali bychom $G_{[0,\,0.5]} = 0.236591$, $G_{[0.5,\,1]} = 0.430965$, $G_{[1,\,1.5]} = 0.558078$, $G_{[1.5,\,2]} = 0.660873$. Z první trojice v posledním sloupci předchozí tabulky dostaneme $G_{[0,\,1]} = 0.669180$ a s polovičním krokem $G_{[0,\,0.5]} + G_{[0.5,\,1]} = 0.667555$. To znamená, že na intervalu [0, 1] jsme přesnosti ε nedosáhli a výpočet musí pokračovat. Na intervalu [1, 2] dostaneme $G_{[1,\,2]} = 1.218952$ a $G_{[1,\,1.5]} + G_{[1.5,\,2]} = 1.218951$, takže zde požadované přesnosti dosaženo bylo. Intervaly [0, 0.5], [0.5, 1] se rozpůlí, vypočtou se $G_{[0,\,0.25]} = 0.083647$, $G_{[0.25,\,0.5]} = 0.152369$, $G_{[0.5,\,0.75]} = 0.197310$, $G_{[0.75,\,1]} = 0.233654$. Nyní $G_{[0,\,0.25]} + G_{[0.25,\,0.5]} = 0.236016$, což se liší od $G_{[0,\,0.5]} = 0.236591$ o víc než ε. Proti tomu $G_{[0.5,\,0.75]} + G_{[0.75,\,1]} = 0.430964$ a to se liší od $G_{[0.5,\,1]} = 0.430965$ o méně než ε, takže výpočet by zřejmým způsobem pokračoval jen na intervalu [0, 0.5], pak na [0, 0.25], [0, 0.125], [0, 0.0625], …

Máme-li představu o průběhu integrované funkce, je ekonomičtější volit hned nerovnoměrné rozdělení přizpůsobené rychlosti změn funkce a integrovat nezávisle v jednotlivých intervalech (včetně půlení a odhadu chyby). Např. integrální logaritmus na str. 7 jsme počítali po intervalech $[2^n, 2^{n+1}]$, $n = 1, 2, \ldots$

1828 (51 let)

DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE

Jako pracovního nástroje se v diferenciální geometrii používá metod matematické analýzy. Studují se objekty různých dimenzí, které vzniknou regulárními zobrazeními intervalů (souborů intervalů) euklidovských prostorů. Regulární zobrazení je spojitě diferencovatelné a jeho derivace splňují určité podmínky pro zajištění vzájemné jednoznačnosti [2,24,25].

Křivky

Množině vektorů $\mathbf{x}(t)$ pro t z intervalu $[a, b]$ (zápis $t\in[a, b]$) říkáme křivka a veličina t je parametr křivky, objektům $\mathbf{x}(u, v)$ pro $(u, v)\in[a_u, b_u]\times[a_v, b_v]$ říkáme plochy. Je-li vektor $\mathbf{x}(t)$ dvojrozměrný, definuje rovinnou křivku, má-li vektor $\mathbf{x}$ tři složky, mluvíme o prostorové křivce atd. Objekt $\{\mathbf{x}(u, v)\}$ v trojrozměrném prostoru nazýváme plochou a u, v jsou parametry plochy. Gauss zůstal u objektů těchto dimenzí. Nic však nebrání rozšíření uvedených pojmů do více dimenzí, i když se ztratí fyzikální názornost.

Příklady. Rovnost $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a\cos t \\ y_0 + b\sin t \end{pmatrix}$ vyjadřuje elipsu se středem $(x_0\,,\, y_0)$ a poloosami a, b. Rovnost $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ at \end{pmatrix} = (r\cos t,\ r\sin t,\ at)^{\mathrm{T}}$, kde $^{\mathrm{T}}$ značí transpozici, vyjadřuje šroubovici navinutou s úhlem stoupání $\alpha = \arctan(a/r)$ na kruhovou válcovou plochu s osou rotace $0z$ v prostoru $0xyz$.

U křivek je často nutné stanovit jejich délku nad nějakým intervalem $[a, b]$. Délka křivky se získá prostě integrací elementu délky $|\mathrm{d}\mathbf{x}(t)| = |\dot{\mathbf{x}}(t)|\,\mathrm{d}t$ přes interval $[a, b]$

$$s_{[a,\,b]} = \int_a^b |\mathrm{d}\mathbf{x}(t)| = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Příklad. Obvod elipsy s poloosami a, b ($a\geq b$), $x_1 = a\cos u$, $x_2 = b\sin u$, je

$$L = \int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{x}}(u)|\,\mathrm{d}u = 4\int_0^{\pi/2} |\dot{\mathbf{x}}(u)|\,\mathrm{d}u = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-a\sin u)^2 + (b\cos u)^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2 u + (b/a)^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (1 - b^2/a^2)\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Substitucí $u = \pi/2 - v$ ($\mathrm{d}u = -\mathrm{d}v$, $v(0) = \pi/2$, $v(\pi/2) = 0$) se poslední integrál převede na

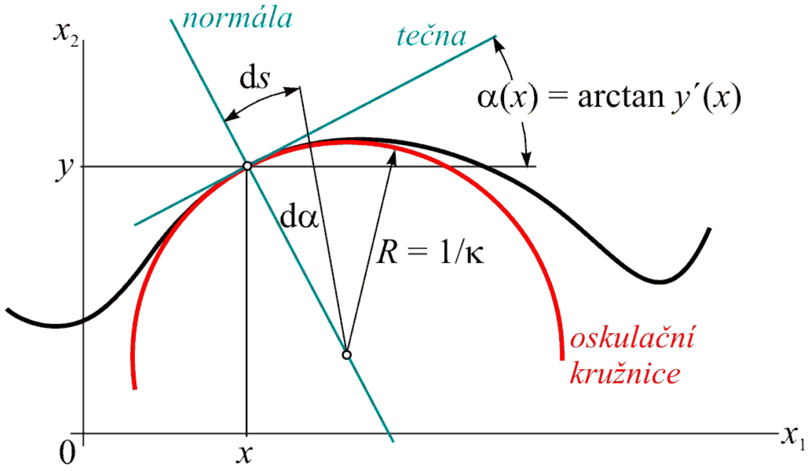
$$\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1 - (1 - b^2/a^2)\cos^2(\pi/2 - v)}\,(-\mathrm{d}v) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (1 - b^2/a^2)\sin^2 v}\,\mathrm{d}v\,,$$

což je úplný eliptický integrál druhého druhu, $E(\sqrt{1 - b^2/a^2})$. Tedy,

$$L = 4a\times E(\sqrt{1 - b^2/a^2}).$$

V případě $a = b$ dostaneme kružnici. Její obvod $L = = 4a\,E(0) = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1}\,\mathrm{d}v = 4a\,\pi/2 = 2\pi a$;

v případě $b = 0$ je $E(1) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (1 - 0^2/a^2)\sin^2 v}\,\mathrm{d}v = \int_0^{\pi/2} \cos v\,\mathrm{d}v = 1$ a $L = 4a$.



Obr. 12 – Rovinná křivka.

Křivku konečné délky si můžeme představit jako kus měděného drátu, ohebného vlákna atd. Slovo oblouk se váže s něčím okrouhlým, částí kružnice, válce apod. U hladké křivky lze očekávat, že okolí nějakého bodu křivky $\mathbf{x}(t)$ bude lépe aproximovat oblouk kružnice než tečna. Taková nejtěsněji se přimykající, *oskulační* kružnice má střed na normále (obr. 12) a její poloměr se najde z rovnosti elementu oblouku křivky a elementu oblouku kružnice. Zvolíme-li $t = x = x_1$, $y(x) = x_2(x)$, je

$$\mathrm{d}s(x) = \sqrt{1+y'^2(x)}\ \mathrm{d}x = R\ \mathrm{d}\alpha(x) = R\ \mathrm{d}\arctan y'^2(x) = R\,\frac{1}{1+y'^2(x)}\,y''(x)\ \mathrm{d}x\,,$$

takže

$$R(x) = \frac{(1+y'^2(x))^{3/2}}{y''(x)}\,.$$

Snadnější je manipulace s převrácenou hodnotou poloměru křivosti, jíž se říká *křivost* a značí se κ:

$$\kappa(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{\mathrm{d}\alpha(x)}{\mathrm{d}s(x)} = \frac{y''(x)}{(1+y'^2(x))^{3/2}}\,.$$

Obecněji

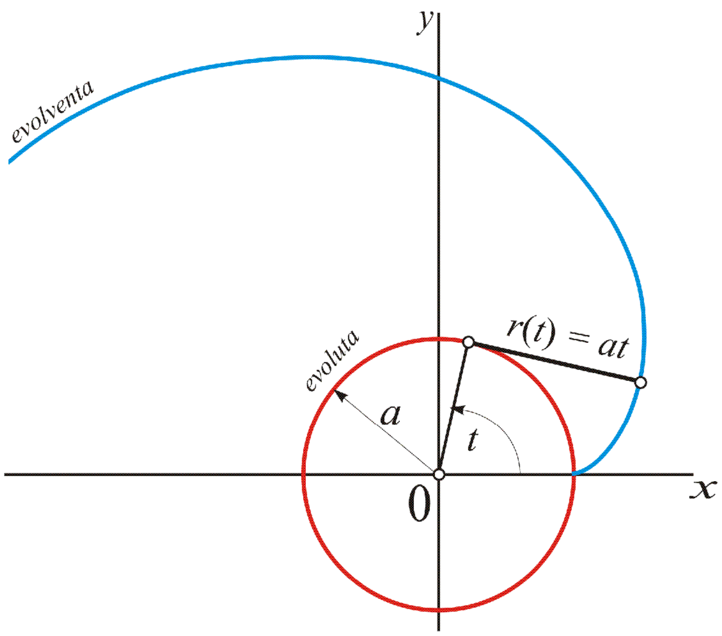
$$\mathrm{d}s(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\ \mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}\alpha(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arctan\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{1+\dfrac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}\,\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\ \mathrm{d}t$$

a křivost

$$\kappa(t) = 1/r(t) = \mathrm{d}\alpha(t)/\mathrm{d}s(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}\,.$$

Pohybuje-li se bod po křivce, mění se tečna, normála, poloměr křivosti. Střed křivosti přitom opisuje křivku zvanou *evoluta*. Sama původní křivka se nazývá *evolventa*. Např. evolventou ke kružnici je spirála znázorněná na obr. 13.



Obr. 13 – Evolventa ke kružnici (spirála).

U prostorových křivek přibývá možností [2,24]. K tečně $\mathbf{T}(\tau)$ ke křivce v bodě $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{x}(t)+\dot{\mathbf{x}}(t)\,(\tau-t)$, existuje nyní nekonečně mnoho normál vyplňujících normálovou rovinu. Volba délky s oblouku křivky za parametr přináší zjednodušení. Vektor $\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s)$ je jednotkový, $|\mathbf{x}'(s)| = 1$, a vektor $\mathbf{t}'(s) = \mathbf{x}''(s)$ definuje *první* nebo *hlavní křivost* ${}^1\kappa(s) = |\mathbf{x}'(s)|$. Protože skalární součin $\mathbf{t}(s).\mathbf{t}(s) = 1$, je $\mathbf{t}'(s).\mathbf{t}(s) = 0$. Jednotkový vektor $\mathbf{n}(s) = \mathbf{t}'(s)/|\mathbf{t}'(s)|$ kolmý na $\mathbf{t}(s)$ se nazývá vektor *hlavní normály*. Vektor $\mathbf{b}(s)$ kolmý na $\mathbf{t}(s)$ i $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$, kde x značí vektorový součin, se nazývá jednotkový vektor *binormály* a trojice ($\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$) pohyblivý hlavní nebo *Frenetův trojhran*. Veličina ${}^2\kappa(s) = |\mathbf{b}'(s)|$ se nazývá *druhá* nebo *torzní křivost*. Víc je uvedeno v [2,24].

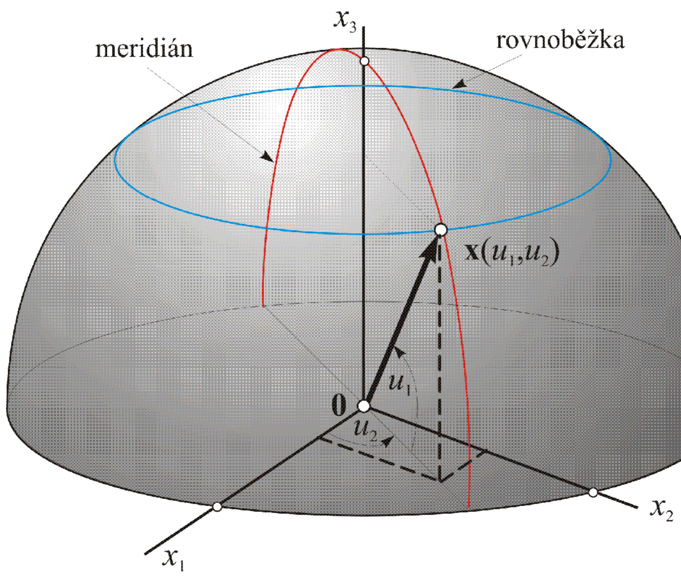
Plochy

Objektům $\{\mathbf{x}(u, v): (u, v)\in U\}$ v trojrozměrném prostoru říkáme plochy.

Příklad. Pro $a > 0$ definují rovnosti (obr. 14)

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ a\sin u\cos v \\ a\sin v \end{pmatrix}$$

zobrazení množiny $[0, 2\pi)\times[0, \pi/2)$ do poloprostoru $x_3>0$. Zřejmě $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$, takže vzdálenost bodů $\mathbf{x}(u, v)$ od počátku $\mathbf{0}$ je konstantní. Takto je definována horní polokoule se středem $\mathbf{0}$ a poloměrem a. Rovnost u = const definuje *meridián* (poledník), v = const definuje *rovnoběžku*.



Obr. 14 – Parametrizace kulové plochy.

Volbou hodnot u_1, u_2 dostáváme na ploše body $\mathbf{x}(u_1, u_2)$. Pro jeden parametr konstantní a druhý proměnný, např. $u_1 = c_1 = \text{const}$, a u_2 proměnné dostaneme parametrickou čáru. Pro jeden parametr měnící se s pevným krokem, přičemž ten druhý probíhá celý svůj obor dostaneme síť parametrických čar. Příkladem mohou být zeměpisná délka a šířka na globusu. Pro měření vzdálenosti dvou bodů na ploše $F(u_1, u_2) = 0$ se zavede tečná rovina v bodě určená dvěma tečnami k parametrickým čarám v tomto bodě. Pro bod (c_1, c_2) jsou tyto tečny dané vektory

$$\mathbf{e}_1 = \mathrm{d}\mathbf{x}(u_1, c_2)\Big|_{u_1=c_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}(u_1, c_2), \frac{\partial x_2}{\partial u_1}(u_1, c_2), \frac{\partial x_3}{\partial u_1}(u_1, c_2)\right)^{\mathrm{T}}\Big|_{u_1=c_1} .\mathrm{d}u_1,$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathrm{d}\mathbf{x}(c_1, u_2)\Big|_{u_2=c_2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2}(c_1, u_2), \frac{\partial x_2}{\partial u_2}(c_1, u_2), \frac{\partial x_2}{\partial u_2}(c_1, u_2)\right)^{\mathrm{T}}\Big|_{u_2=c_2} .\mathrm{d}u_2 .$$

Rovnoběžník určený trojicí $\{\mathbf{x}(c_1, c_2), \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ definuje délkový element plochy $\mathbf{x}(u_1, u_2)$ v bodě $\mathbf{x}(c_1, c_2)$

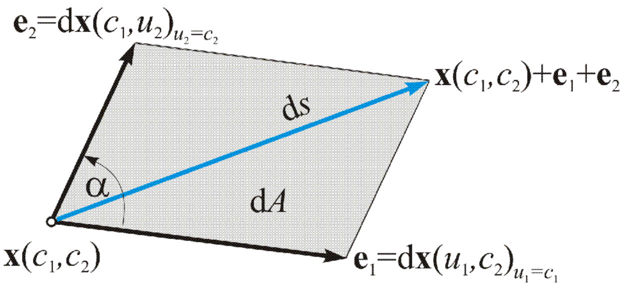
$$\mathrm{d}s(c_1, c_2) = \left|\mathrm{d}\mathbf{x}(c_1, c_2)\right| = \left|\mathrm{d}\mathbf{x}(u_1, c_2)\Big|_{u_1=c_1} + \mathrm{d}\mathbf{x}(c_1, u_2)\Big|_{u_2=c_2}\right| = \left|\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\right|$$

i plošný element (obsah infinitesimálního rovnoběžníka, obr. 15)

$$\mathrm{d}A(c_1, c_2) = \left|\mathrm{d}\mathbf{x}(u_1, c_2)\Big|_{u_1=c_1} \times \mathrm{d}\mathbf{x}(c_1, u_2)\Big|_{u_2=c_2}\right| = \left|\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\right|,$$

Čtverec délky elementu křivky, tj. vzdálenosti bodů (c_1, c_2) a $(c_1, c_2) + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, je

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathbf{e}_1\,\mathrm{d}u_1 + \mathbf{e}_2\mathrm{d}u_2).\,(\mathbf{e}_1\,\mathrm{d}u_1 + \mathbf{e}_2\mathrm{d}u_2) = \mathbf{e}_1.\,\mathbf{e}_1\,\mathrm{d}u_1^2 + 2\,\mathbf{e}_1.\,\mathbf{e}_2\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 + \mathbf{e}_2.\,\mathbf{e}_2\,\mathrm{d}u_2^2$$
$$= g_{11}\,\mathrm{d}u_1^2 + 2\,g_{12}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 + g_{22}\,\mathrm{d}u_2^2.$$



Obr. 15 – Element plochy $\mathbf{x}(u_1, u_2)$ *v bodě* $\mathbf{x}(c_1, c_2)$*.*

Matice $\mathbf{G} = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$ reprezentuje *metrický tenzor plochy* (symetrický tenzor 2. řádu). Kvadratická forma $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{G}\, \mathrm{d}\mathbf{u}$ je tzv. *první fundamentální forma plochy*.

Plošný element (obr. 15) je

$$\mathrm{d}A = |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2 = |\mathbf{e}_1|\,|\mathbf{e}_2| \sin\alpha\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2 = \sqrt{g_{11} g_{22} (1 - \cos^2\alpha)}\ \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2$$

$$= \sqrt{g_{11} g_{22} \left(1 - \frac{g_{12}^2}{g_{11} g_{22}}\right)}\ \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2 = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\ \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2$$

a celá plocha přiřazená množině U v parametrickém prostoru je

$$A = \int_{\mathrm{U}} \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\ \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2 = \int_{\mathrm{U}} \sqrt{g_{11} g_{22} (1 - \cos^2\alpha)}\ \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2\,.$$

Příklad. Plocha polokoule o poloměru a (obr. 14). Podle předchozího příkladu

$$\mathbf{e}_1 = \mathrm{d}\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} \end{pmatrix} \mathrm{d}u = \begin{pmatrix} -a \sin u \cos v \\ a \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}u,$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathrm{d}\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \mathrm{d}v = \begin{pmatrix} -a \cos u \sin v \\ -a \sin u \sin v \\ a \cos v \end{pmatrix} \mathrm{d}u.$$

Dále

$g_{11} = \mathbf{e}_1.\mathbf{e}_1 = (-a \sin u \cos v)^2 + (a \cos u \cos v)^2 + 0^2 = a^2 \cos^2 v$,

$g_{12} = \mathbf{e}_1.\mathbf{e}_2 = (-a \sin u \cos v)(-a \cos u \sin v) + (a \cos u \cos v)(-a \sin u \sin v) + 0 = 0$,

$g_{22} = \mathbf{e}_2.\mathbf{e}_2 = (-a \cos u \sin v)^2 + (-a \sin u \sin v)^2 + (a \cos v)^2 = a^2$,

takže

$$A = \int_{\mathrm{U}} \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\ \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 v . a^2}\ \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos v\, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = a^2 \int_0^{2\pi} 1.\, \mathrm{d}u = 2\pi a^2.$$

Úhel dvou křivek na ploše, které se protínají v bodě plochy $\mathbf{x}(u_1, u_2)$, je roven úhlu sevřenému jejich tečnými vektory v tomto bodě (obr. 15). Např. úhel parametrických čar zavedených na kulové ploše (rovnoběžek a poledníků na obr. 14) je

$$\alpha = \arccos \frac{|g_{12}|}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Čáry procházející daným bodem plochy umožňují definovat lokální křivost, normálu k ploše atd. Podobně jako křivost rovinné křivky je rovna křivosti oskulační kružnice, dá se křivost plochy v jejím bodě chápat jako křivost příslušné oskulační kvadriky (elipsoidu, hyperboloidu atd.). Gauss definoval křivost plochy pomocí sférického obrazu okolí, kdy směr vektoru vnější normály v bodě plochy určuje bod na jednotkové kulové ploše. Příslušný aparát je však složitější, proto jen odkazujeme na literaturu.

Gaussova křivost plochy je součin jejích hlavních křivostí (maximální a minimální v bodě) a je určena jen metrickým tenzorem plochy a 1. a 2. derivacemi jeho složek. To je slavná Gaussova *theorema egregium* [25].

Jednu plochu lze zobrazit bez zkreslení délek na jinou plochu právě tehdy, mají-li obě plochy v odpovídajících si bodech stejnou Gaussovu křivost. Do roviny lze tedy rozvinout jen plochy s nulovou Gaussovou křivostí (válec, kužel a některé přímkové plochy), nikoli elipsoidy. S tím souvisí nutné zkreslení geografických map.

●

Rozšíření diferenciální geometrie do *n*-rozměrného prostoru naznačil ve své inaugurační přednášce (1854) Gaussův žák B. Riemann (1826-1866). Práce ve více rozměrech však vyžaduje složitý aparát – tenzorový počet [25].

S diferenciální geometrií se dnešní studenti setkávají spíš ve fyzice než při studiu matematiky (pokud se ovšem nespecializují na geometrii). Obecná teorie relativity ukázala souvislost geometrie s fyzikou. Přechod do více dimenzí umožnil sjednocení různorodých fyzikálních polí. Tímto směrem se dnes ubírá také hledání jednotné teorie reality s produkty jako teorie strun, *m*-teorie apod. Ty přecházejí z názorných 3 rozměrů do 10rozměrného prostoru, jehož geometrie je velmi, velmi složitá [26-29].

Diferenciální geometrie nutně vybočuje z mezí daných axiomy a postuláty euklidovské geometrie. Např. na globusu může každý hned vidět, že koncové body oblouku rovníku odpovídajícího 90° zeměpisné délky a severní pól vytvářejí sférický trojúhelník se součtem vnitřních úhlů 3×90° = 270°, nikoli 180°. Nazveme-li hlavní kružnice na kulové ploše přímkami (jejich rovina prochází středem kulové plochy), pak bodem mimo danou hlavní kružnici nelze vést žádnou rovnoběžku. Apriorní důvod, proč by fyzikální svět měl vyhovovat právě axiomům euklidovské geometrie, neexistuje.

Gauss byl z obvykle uváděné trojice objevitelů neeuklidovské geometrie — Bolyai, Gauss, Lobačevskij — prvním (kolem r. 1800), kdo si toto všechno dobře uvědomoval. Sám ale nezveřejnil nic, co by přímo odporovalo Euklidovi, Kantovi a běžnému empirickému chápání fyzikálního světa.

Někdy se říká, že Gauss se speciálně zajímal o součet úhlů v tzv. velkém trojúhelníku ze svých geodetických měření. Šlo o trojúhelník se stranami:

Hoher Hagen u Göttingen – Brocken (Harz) (vzdálenost 68km),
Brocken– Großer Inselsberg (Thüringer Wald) (vzdálenost 106km),
Großer Inselsberg – Hoher Hagen (vzdálenost 84km).

Pokud se světlo šíří přímočaře, jde o rovinný trojúhelník. V rámci přesnosti měření statisticky významná odchylka součtu úhlů od 180° zjištěna nebyla.

●

HYPERGEOMETRICKÁ ŘADA

K matematické analýze patří neodmyslitelně řady. Nejjednodušší je geometrická řada, tj. součet mocnin nějakého čísla q, kvocientu,

$$s_g(q) = 1 + q + q^2 + \ldots = \lim_{n\to\infty} (1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \\ \infty & \text{pro} \\ \text{nedef.} & \end{cases} \begin{matrix} |q| < 1 \\ \\ q \geq 1 \\ q \leq -1 \end{matrix} .$$

Geometrickou řadu lze zobecnit na mocninnou řadu přidáním reálných (popř. komplexních) koeficientů a_0, a_1, … k mocninám proměnné z,

$$s(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

Z mocninné řady dostaneme pro $z = 1$ řadu s konstantními členy. Ze srovnání s geometrickou řadou plynou základní kritéria konvergence:

řada $s(1)$ konverguje absolutně,

je-li $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ (d´Alembert),

je-li $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ (Cauchy).

Nutnou podmínkou konvergence řady $s(1)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. V případě alternující řady, kdy $a_n\, a_{n+1} < 0$, je to i podmínka postačující. Navíc lze alternativní řadu uspořádat tak, aby jejím součtem bylo libovolné reálné číslo (Riemann) [2]. U řad, jejichž členy nemění znaménko, bylo odvozeno mnoho postačujících podmínek konvergence, např. kritéria d´Alembertovo, Cauchyho, Raabeho, Kummerovo, srovnávací, integrální [2].

Hypergeometrickou řadu

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)\times b(b+1)\ldots(b+k-1)}{c(c+1)\ldots(c+k-1)\times k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

přičemž $a_0 = 1$ a $c > 0$, zavedl už Euler. Jejím důkladným studiem a podmínkami konvergence se však vážně zabýval teprve Gauss.

V první řadě se nabízí zobecnění na ${}_pF_q$, tj. na obecněji strukturované koeficienty. Např. ${}_1F_1(1, 1; z) = 1 + z/1! + (1.2/1.2)\, z^2/2! + \ldots = e^z$. My zde však zůstaneme jen u klasických $p = 2$, $q = 1$.

Obecnost hypergeometrické řady ukazují tato fakta:

je-li a nebo b záporné celé, je ${}_2F_1(a, b, c; z)$ polynom stupně $|a| - 1$ nebo $|b| - 1$,

pro $a, b > 0$ je $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 1$, proto ${}_2F_1(a, b, c; z)$ absolutně konverguje pro $|z| < 1$.

Hypergeometrickou řadou se dá vyjádřit mnoho funkcí. Např.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = {}_2F_1(1, 1, 1; z)\,, \qquad \frac{1}{1+z} = {}_2F_1(1, 1, 1; -z)\,,$$

$$(1+z)^n = 1 + \frac{-n\times 1}{1\times 1!}(-z) + \frac{(-n)(-n+1)\times 1.2}{1.2\times 2!}(-z)^2 + \ldots + \frac{(-1)^n\, n!\times n!}{n!\times n!}(-z)^n$$
$$= {}_2F_1(-n, 1, 1; -z) = {}_2F_1(1, -n, 1; -z),$$

Pro $|z| < 1$ platí (řada za znaménkem integrálu je stejnoměrně konvergentní)

$$\operatorname{arctan} z = \int_0^z \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^z (1 - t^2 + t^4 - \ldots)\,\mathrm{d}t = z\,(1 - \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{5}z^4 - \ldots)$$
$$= z\,(1 - \frac{1\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\times 1}z^2 + \frac{(1\times 2)\times(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2})}{(\frac{3}{2}\times\frac{5}{2})\times(1\times 2)}z^4 - \frac{(1\times 2\times 3)\times(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2})}{(\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{7}{2})\times(1\times 2\times 3)}z^6 + \ldots)$$
$$= z\,{}_2F_1(1, {}^1\!/_2, {}^3\!/_2; -z^2)\,,$$

$$\arcsin z = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^z (1-t^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \int_0^z \left(1 - \binom{-1/2}{1}t^2 + \binom{-1/2}{2}t^4 - \ldots\right)\mathrm{d}t$$
$$= z\;{}_2F_1({}^1\!/_2, {}^1\!/_2, {}^3\!/_2; z^2)$$

Proměnná z je obecně komplexní. Konvergentní hypergeometrická řada je pak holomorfní (analytickou) funkcí a je tedy velmi univerzálním nástrojem [5,31].

Gaussovo kriterium konvergence řady $s(1)$: je-li $a_n > 0$ a b_n omezená posloupnost, (tj. $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| \le K < +\infty$) a $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = q + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{b_n}{n^r}$, $r > 1$, pak

- je-li $q > 1$, řada $s(1)$ konverguje absolutně, a je-li $q < 1$, řada $s(1)$ diverguje (d´Alembertovo kriterium),
- je-li $q = 1$ a $\mu > 1$, řada $s(1)$ konverguje a je-li $\mu \le 1$ diverguje [32].

Při výpočtu délky oblouku elipsy (s. 23) jsme narazili na eliptický integrál. Integrál racionální funkce R obsahující odmocninu z polynomu $P_n(x)$ n-tého stupně označme I_n, tedy $I_n = \int R(x, \sqrt{P_n(x)})\,\mathrm{d}x$. Integrály I_1, I_2 vedou na elementární funkce (Eulerovy substituce), I_3, I_4 se nazývají *eliptické* a pro $n > 4$ dostáváme tzv. hypereliptické integrály.

Legendre dokázal, že obecný eliptický integrál lze převést na kombinaci eliptických integrálů 1., 2. a 3. druhu v normálním tvaru. Nejčastěji se vyskytují eliptické integrály 1. a 2. druhu, které po substituci $x = \sin\varphi$ nabudou tvar ($k^2 \le 1$)

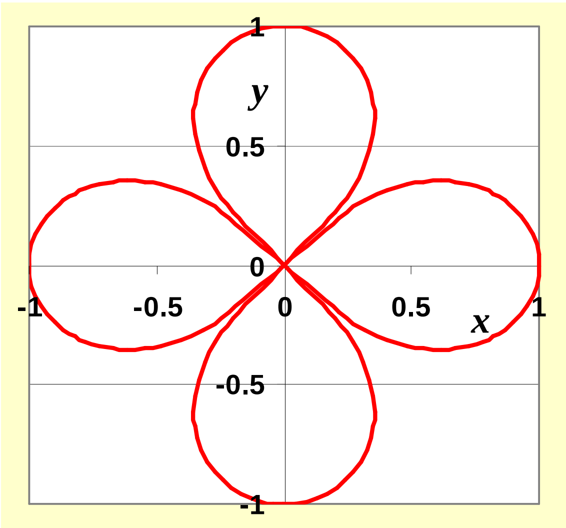
$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\,, \qquad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\,.$$

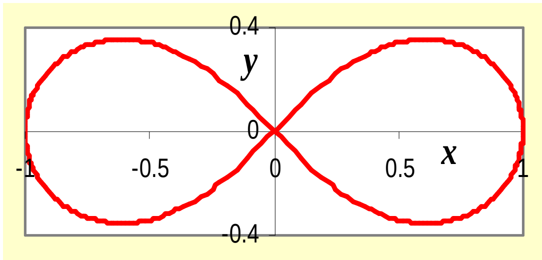
Eliptické integrály jsou transcendentní funkce, jejichž hodnoty se počítají pomocí mocninných řad. Mocninnou řadu lze však zpravidla rozšířit do komplexní roviny. Velmi přirozeně se můžeme také ptát, jaké φ nebo k (popř. $\alpha = \arcsin k$) odpovídá dané hodnotě F nebo E. Přechod k inverzním, tzv. *eliptickým funkcím* (eliptickému sinu *sn*, eliptickému cosinu *cn*, tzv. Jacobiho funkcím), lze zase uskutečnit nekonečnými řadami, přičemž se objeví charakteristická vlastnost dvojperiodičnosti [33-35]. Analýza eliptických funkcí (dvojperiodických meromorfních zobrazení komplexní roviny na sebe) se zařazuje do teorie funkcí komplexní proměnné. Dnes je tato tematika dost speciální, byla však velmi aktuální v 19. století při budování teorie funkcí. Teorie eliptických funkcí je spojena se jmény N. H. Abel, C. G. J. Jacobi, K. Weierstrass.

Gauss už v mládí odvodil např. tzv. hypergeometrickou rovnici,

$$x(1-x)\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + [c-(a+b+1)\,x]\,\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}x} - ab\,y = 0\,,$$

pomocí níž zvládl teorii lemniskáty (obr. 16) a eliptických funkcí. V této oblasti ale nepublikoval [35].





Obr. 16 – Lemniskáty $x(t) = r(t)\cos t$, $y(t) = r(t)\sin t$, kde $r(t) = \sqrt{|\cos\,(2t)|}$ (vlevo) nebo $\sqrt{\cos\,(2t)}$ (vpravo).

Teorie funkcí komplexní proměnné a nekonečné řady (resp. součiny) jsou nerozlučně spjaty. Gauss znal např. Cauchyho větu (zhruba řečeno: integrál holomorfní (diferencovatelné) komplexní funkce po jednoduché uzavřené křivce v komplexní rovině je roven 0) i další vlastnosti funkcí komplexní proměnné.

V letech 1818–1845 se Gauss věnoval geodézii. Z potřeby vybudovat její solidní základy vytvořil diferenciální geometrii a pracoval v optice. Další oblastí pro aplikace matematiky byla fyzika, tedy mechanika, elektřina a magnetismus. Nikdy se ale nepřestal zabývat astronomií a obecně matematikou.

MECHANIKA

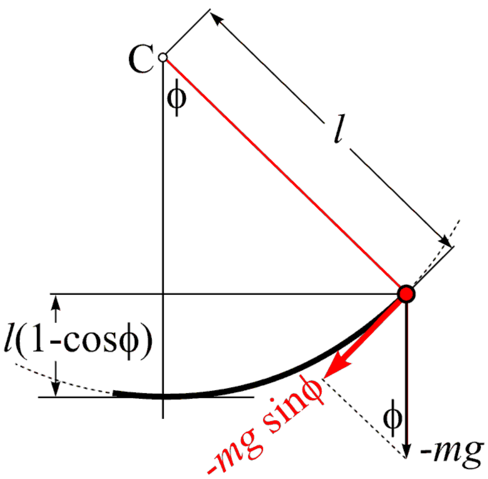
Gaussův princip nejmenší vázanosti [36] se dá formulovat takto.

> Při pohybu soustavy hmotných bodů, které mají hmotnosti m_i, i = 1, …, n, a jsou podrobeny vazbám, se minimalizuje výraz
>
> $$Z = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}\left(m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}_i - \mathbf{F}_i\right)^2,$$
>
> v němž $\mathbf{v}_i$ značí skutečnou rychlost a $\mathbf{F}_i$ sílu působící na $i$tý hmotný bod.

Výraz Z Gauss nazval Zwang, čili nucenost nebo vázanost. Představuje součet čtverců rozdílů zrychlení skutečného pohybu a zrychlení vyvolaných silami $\mathbf{F}_i$, resp. rozdílů odpovídajících sil s vahami (koeficienty důležitosti) závislými na hmotnosti. V tomto smyslu jde o analogii metody nejmenších čtverců.

V mechanice se používá mnoha diferenciálních a integrálních principů [36]. Gaussův princip je svou podstatou nejobecnější diferenciální princip.

Příklad. Matematické kyvadlo je hmotný bod o hmotnosti m, který se volně pohybuje v rovině s gravitačním zrychlením g po kružnici o poloměru l (těžká kulička na nehmotné neprodlužitelné tyčce nebo vlákně délky l ve vzduchoprázdnu). Tyčka (vlákno) reprezentuje rovinnou vazbu (obr. 17). Hmotný bod opisuje oblouk kružnice obvodovou rychlostí $v = l\,\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$. Síla, která na hmotný bod působí, je $F = -mg\sin\phi$ (= d/dϕ(–mg(1–cosϕ)). V tomto případě je n = 1 (jedna hmotnost) a vázanost



Obr. 17 – Matematické kyvadlo.

$$Z = m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, l\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} - \frac{-mg\sin\phi}{m}\right)^2 = ml\left(\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\phi\right)^2.$$

Nezáporný výraz Z zřejmě dosáhne minima, když se anuluje závorka na pravé straně, tj.

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0\,.$$

To je rovnice matematického kyvadla.

Ukážeme její řešení. Násobením $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ a integrací dostaneme

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{g}{l}\cos\phi = \text{const}$$

Při maximální úhlové výchylce α je rychlost nulová, tedy const = – $\frac{g}{l}\cos\alpha$ a $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\phi - \cos\alpha}$. Odtud

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\alpha}}\,.$$

Protože cos ϕ = cos (ϕ/2 + ϕ/2) = $\cos^2(\phi/2) - \sin^2(\phi/2) = 2\cos^2(\phi/2) - 1$ a $\cos\alpha = 2\cos^2(\alpha/2) - 1$, je $\cos\phi - \cos\alpha = 2(\cos^2(\phi/2) - \cos^2(\alpha/2))$. Pak

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2(\cos^2\phi/2 - \cos^2\alpha/2)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos^2(\phi/2) - \cos^2(\alpha/2)}}\,.$$

Položme

$$k = \sin(\alpha/2)$$

a zaveďme novou proměnnou u vztahem $\sin(\phi/2) = k \sin u$, tj. $\phi = 2 \arcsin(k \sin u)$. Zřejmě také $u(\phi) = \arcsin(\sin(\phi/2)/k) = \arcsin(\sin(\phi/2) / \sin(\alpha/2))$, $d\phi = 2\dfrac{k \cos u}{\sqrt{1-(k \sin u)^2}}\, du$. Dále

$$u(\alpha) = \arcsin 1 = \pi/2, \ \sin u(\alpha) = 1$$

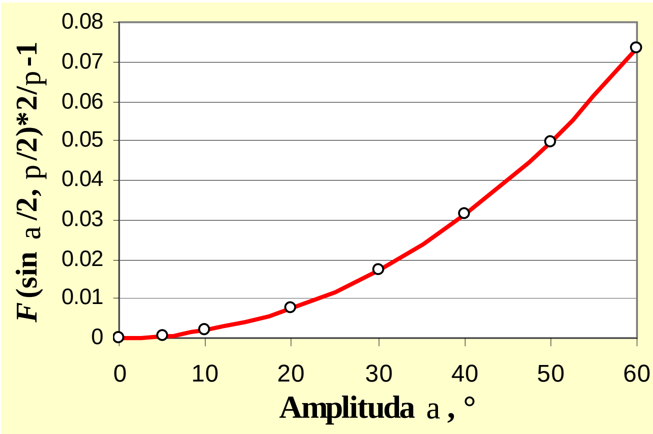
a

$$t(\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{u(\phi)} \frac{2k \cos u\, du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u - 1 + k^2 \sin^2 u(\alpha)}\ \sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{u(\phi)} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\, F(k, u(\phi)).$$

Poslední integrál je eliptický integrál 1. druhu. Tedy

$$\phi(t) = 2 \arcsin\left[\sin\frac{\alpha}{2}\ \mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t; \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right] .$$

Perioda kyvů je $T(\alpha) = 4\sqrt{\dfrac{l}{g}}\, F(k, u(\alpha)) = 4\sqrt{\dfrac{l}{g}}\, F(\sin\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\pi}{2}) = 4\sqrt{\dfrac{l}{g}}\,\dfrac{\pi}{2}\, {}_2F_1(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1; \dfrac{1-\cos\alpha}{2})$.



Obr. 18 – Poměrné prodlužování doby kyvu v závislosti na amplitudě ${}_2F_1(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{1-\cos\alpha}{2}) - 1$.

Protože cesta k přesnému vyjádření T není zrovna elementární, uvažují se při kvalitativní analýze jen malé kmity. Pak $\sin\phi \approx \phi$, a kyvadlo se aproximuje lineárním oscilátorem

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l}\phi = 0 .$$

Řešení poslední rovnice s počátečními podmínkami $\phi(0) = \phi_0$, $\dfrac{d\phi}{dt}(0) = 0$ lze psát ve tvaru

$$\phi(t) = \phi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - t_0)\right) .$$

Poznámka. Tuhá nehmotná tyč umožňuje pohyb po celé kružnici ($-\pi \le \alpha \le \pi$), kdežto u řetězu nebo lana vzniká při $|\alpha| > \pi/2$ kombinace s volným pádem. Hmotná tyč představuje fyzické kyvadlo a pomocí momentu setrvačnosti lze např. modelovat pád hmotné tyče postavené na jeden konec, pád sloupu atd.

•

Gauss zavedl ve fyzice *systém absolutních jednotek CGS* (cm, g, s). V těchto jednotkách pracoval zejména s magnetickým a elektrickým polem.

ELEKTŘINA A MAGNETISMUS

Další pole pro uplatnění matematiky se objevilo při výzkumu elektřiny a magnetismu ve spolupráci Gausse s fyzikem Wilhelmem Weberem (1804-1891), který byl v Göttingen nejprve Gaussovým asistentem. Gauss 1831 navrhl přístroj k měření magnetického pole. Tím začali studium zemského magnetického pole. Weber sestrojil přenosný magnetometr [37]. Při zkoumání elektrických proudů objevili 1833 zákony, které později znovu objevil G. R. Kirchhoff (1847).

Je možné, že uvažování o fyzikálních polích vedlo k formulaci následující *Gaussovy věty*:

$$\int_V \nabla.\mathbf{F}\, dV = \int_{\partial V} \mathbf{n.F}\, dA ,$$

kde $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$ je vektorová veličina v prostoru, $\nabla.F = \frac{\partial}{\partial x}F_x + \frac{\partial}{\partial y}F_y + \frac{\partial}{\partial z}F_z$, V je prostorová oblast ohraničená uzavřenou plochou ∂V, **n** je vnější normála a dA je element plochy ∂V [2].

Tuto větu objevil již 1762 J. L. Lagrange, Gauss ji objevil v roce 1813 a po něm 1825 G. Green, 1831 M. V. Ostrogradskij, který také podal její důkaz. Věta je důsledkem obecně formulované Stokesovy věty.

S Gaussovou větou se setkávají studenti matematiky, fyziky, elektrotechniky a dalších vědních a inženýrských oborů, uplatňuje se v proudění tekutin nebo v teorii potenciálu.

Gauss s Weberem sestrojili první telegraf na světě v roce 1833 — telegrafické spojení Gaussovy hvězdárny s Weberovou fyzikální laboratoří (asi 1.3km). Gauss uvažoval o využití takového spojení u železnic. Opravdové dálkové spojení s praktickou využitelností vybudoval 1844 Samuel Morse (Baltimore – Washington).

Gauss studoval zemský magnetismus a 1839 vydal knihu ´*Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus*´ [38]. Magnetické pole Země odpovídá dipólu ve středu Země. Správně vypočetl polohu jižního magnetického pólu. Úhel mezi osou magnetického dipólu a osou rotace Země se mění (v současné době je asi 11°).

Na Gaussovu počest byla jednotka magnetické indukce označena G (Gauss) = $g^{1/2}\ cm^{-1/2}\ s^{-1} = 10^{-4}$ T (Tesla).

●

Velkým triumfem J. C. Maxwella bylo, když r. 1865 ukázal, že elektromagnetické vlny se šíří rychlostí světla [39]. To se však domnívali i jiní vědci před ním. Kirchhoff 1848 poznamenal, že podíl elektromagnetických a elektrostatických jednotek je rovna rychlosti světla, i když to neuměl objasnit. B. Riemann 1858 vytvořil teorii založenou na hypotéze, že elektromagnetické jevy se šíří konstantní rychlostí a pak odvodil, že tato rychlost musí být podílem elektromagnetických a elektrostatických jednotek, $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ (ε_0, μ_0 jsou permitivita a permeabilita vakua).

Dokonce i v této oblasti by si Gauss mohl dělat nároky na prioritu. Dospěl k názoru, že klíčem k pochopení elektrodynamiky je určení rychlosti, jíž se elektromagnetické pole šíří. V nepublikovaných pracích z roku 1835 a objevených až v jeho pozůstalosti napsal, že

“Dva elektrické elementy ve stavu relativního pohybu se přitahují nebo odpuzují, ale jinak než ve stavu vzájemného klidu.“

Dokonce navrhl příslušný vzorec pro výpočet síly. Ten však nebyl úplně správný, protože porušoval zákon zachováni energie [39]. W. Weber jej později opravil na

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2 c^2}\left(c^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right),$$

kde r je vzdálenost mezi částicemi s náboji q_1, q_2. Roku 1903 K. Schwarzschild publikoval článek, ve kterém ukázal, jak by se Gaussův-Weberův postup dal rozvinout do užitečné teorie. U nabitých nerotujících částic je statická síla $F(0) = \frac{q_1 q_2}{r^2}$, pro částice s konstantní relativní rychlostí v je $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = 0$ a $F(v) = \frac{q_1 q_2}{r^2}(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})$, takže

$$\frac{F(v)}{F(0)} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \approx \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\,.$$

Tento vztah nám připomíná Lorentzovu transformaci a speciální teorii relativity. Shodou okolností první publikací o teorii relativity je článek:

EINSTEIN, A., ´*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*´. Annalen der Physik, Bd. **17**, *1905*, S. 891-921
(http://www.scribd.com/doc/162653/Albert-Einstein-Zur-Elektrodynamik-bewegter-Korper).

●

GAUSSOVY CHARAKTERISTICKÉ POSTOJE

Gaussovým heslem bylo: *Pauca sed matura* (málo, ale zralé). Jen málo ze svých objevů uveřejnil hned. Je jasné, že Gauss měl nesmírně hluboký vhled do problémů, které řešil. Říká se, že kdyby zveřejňoval všechny své objevy, posunul by matematiku nejmíň o 50 let dopředu (E. T. Bell). Podle zásady, že u hotových staveb se také neukazuje lešení, cestu ke svým objevům nezveřejňoval. Publikoval jen výsledné věty a striktní důkazy. To evokuje atmosféru kolem objevu algebraického řešení kubické rovnice (v 16. stol.).

Přesnost a jasnost myšlení spolu s jednoduchostí výkladu byly charakteristiky Gaussovy práce. Je zřejmé, že netrpěl touhou po slávě, neboť řadu svých objevů si nechával pro sebe, např. teorii funkcí komplexní proměnné. Tím by asi nezapadl do dnešní doby. Mnohé jeho práce se našly až v jeho pozůstalosti a byly vydány v souhrnných spisech o 7 svazcích (E. C. J. Schering (1833-1897) editoval 1. – 6. díl).

Jednou poznamenal, že jeden článek N. Abela ho zbavil otravné práce, kdyby musel publikovat třetinu svých výsledků o eliptických integrálech. Podobně se svěřil přátelům, že Jacobi a Eisenstein ho "zbavili nepříjemností" publikovat výsledky, které znal už jako teenager, ale nestačil je zveřejnit. Dedekind dokonce řekl, že podobnou poznámku Gauss pronesl i o Riemannově disertaci.

Byl mistrem numerických výpočtů, počítal bezchybně. Na přednášky si nosil jen malý lísteček se zápisem nutných dat.

Je zajímavé, že také přesné definice základních pojmů analýzy přenechal jiným. Např. definici limity podali B. Bolzano (1781-1848) a A. Cauchy (1789-1857). Ale Gauss určitě implicitně pracoval s dobrou definicí např. při zkoumání konvergence řad. Podobně tomu jistě bylo i v případě integrálu. Patrně tušil obtížnost. Určitý integrál definovali A. Cauchy a B. Riemann. Jejich konstrukce však nebyly dost obecné. Zobecnili je Lebesgue, Perron aj. počátkem 20. století. Zatím nejobecnější pojem integrálu zavedli nezávisle Jaroslav Kurzweil (1957) a Ralf Henstock (1960) [2].

Manipulace s aktuálním nekonečnem, na nichž stavěli teorii množin B. Bolzano a potom zvlášť G. Cantor (1845-1918), považoval Gauss za nepřípustné. Shodný postoj se samozřejmě uplatňuje u aplikací matematiky v reálném světě a v technické praxi. Někteří matematici jej zastávají i dnes. Na druhé straně by matematika vyloučením úvah založených na manipulaci s nekonečnými množinami ztratila velmi mnoho [40].

Gauss kombinoval mimořádně široký záběr působnosti s vynalézavostí a absolutní přesností v důkazech. Snaha po přesnosti je také důvodem, proč studium jeho prací bylo obtížné a jejich obsah se při povrchním čtení nedal dobře pochopit.

F. Klein (1849-1925), matematik z Göttingen známý např. svým ´Erlangenským programem´ (v němž mj. definoval geometrii jako studium invariantů definující grupy transformací prostoru) [40], nazval roky 1798-1807 Gaussovou heroickou dobou. Poměrně velkou část své knihy ´Vývoj matematiky v 19. století´ věnoval Gaussovým matematickým pracím z perspektivy počátku 20. století [35].

●

OSOBNÍ ŽIVOT

Gauss se oženil 9. října 1805. 21. srpna 1806 se mu narodil první syn Joseph, 1808 se narodila dcera Wilhelmina, 1809 se narodil Louis, ale brzy potom jeho žena Johanna zemřela a 1810 zemřel i malý Louis. Tuto rodinnou tragedii nesl Gauss velmi těžce a provázela ho celý další život. Oženil se podruhé a v druhém manželství měl dva syny, Eugena a Wilhelma, a dceru Terezu.

Pro dokreslení doby, v níž Gauss žil, uvedeme několik úryvků z knihy [1].

22. března 1823 Gausse shodil na dlažbu kůň, ale Gauss to naštěstí odnesl jen odřeninou a modřinou pod pravým okem, poškrábaným nosem a odřenýma rukama. Za týden už psal, že tento incident mu připomínají jen duhové barvy pod okem.

Čím byl Gauss starší, tím víc byl přesvědčen, že matematika se dá studovat jen z knih, bez učitele. V dopisech si často stěžoval na nedostatečné vědomosti studentů. Snažil se, aby jeho přednášky byly hodnotné a na vysoké úrovni. Pak ovšem míval v posluchárně jen pár studentů. Přednášel nerad – zřejmě to pro něj byla jen ztráta času. Paradoxní je, že nebyl profesorem matematiky, ale astronomie.

V dopise Bolyaiovi z 20. dubna 1848 napsal:
"Je pravda, že můj život je ozdoben mnohým, o čem si svět myslí, že je hodno závisti. Ale věř mi, drahý Bolyai, že stinné stránky života, aspoň toho mého, které se jím vinou jako červená niť a kterým se člověk může ve stáří bránit čím dál míň, nejsou ani ze setiny vyváženy tím, co přináší radost. Rád uznám, že stejný osud, který já nesu tak těžce, by jiní snášeli mnohem lépe, ale mentální konstituce patří k našemu egu, tu jsme dostali při svém narození a můžeme ji jen málo změnit…

Jednou řekl, že největší pohrdání zasluhuje člověk, který trvá na svých omylech přesto, že o nich už ví. Jeho filosofie měla mocné kouzlo a některému svému příteli řekl: "Existují otázky, na něž znát odpovědi by pro mě mělo větší cenu než matematika. Ty se např. týkají etiky, našeho vztahu k Bohu, našeho osudu a budoucnosti. Ale jejich odpovědi jsou pro nás nedosažitelně daleko a mimo oblast vědy."

●

V zimních obdobích 1852 a 1853 si Gauss opakovaně stěžoval na zdravotní problémy, ačkoli po většinu života byl naprosto zdráv a fyzicky velmi zdatný. Trpěl překrvením sliznic a tvorbou hlenů, které považoval za hlavní problém. Vstával ve 3 ráno a pil Seltzerovu vodu a horké mléko. Tato jednoduchá kúra mu pomohla. Gauss měl malou důvěru v medicínu a trvalo mu velmi dlouho, než šel k doktorovi. S jarem se jeho stav natolik zlepšil, že mohl chodit do knihovny a na krátké vycházky do okolí.

Gauss měl živý zájem o stavbu a provoz železnic. Ale když 24. června 1854 jel s dcerou v kočáře, aby se podívali na stavbu železnice z Göttingen do Kasselu, jedoucí lokomotiva splašila koně a kočí byl vážně zraněn. Jim se naštěstí nic nestalo. Trať Göttingen-Hannover byla otevřena 31. července 1854 a Gauss se mohl zúčastnit oslavných akcí. Baron Sartorius, syn Gaussova přítele, později vzpomínal, jak jej jako ještě malého chlapce Gauss držel v náručí, aby mohl vidět projíždějící vlak.

Na podzim 1854 se Gaussův zdravotní stav týden za týdnem zhoršoval. Dřívější syndrom otékání nohou byl zřetelnější, ale Gauss jej nepovažoval za vážný. Nakonec musel zůstávat doma a nemohl už chodit ani do blízké knihovny. Zhoršující se astma mu ztěžovalo i pochůzky doma. 7. prosince se mu tak přitížilo, že dr. Baum se bál, že Gauss nepřežije noc. Ale Gauss se druhého dne po nočním klidu cítil mnohem líp a vyslovil naději, že se bude moci brzo vrátit k normálnímu dennímu režimu. Pak ale začal trpět vodnatelností. Konverzace se pro něj stala tak obtížnou, že nemohl přijímat návštěvy přátel. Dr. Baum a dcera Tereza byli jediní, kdo s ním trávili poslední týdny života. Ačkoli Gauss nemohl už pracovat, zůstal mentálně aktivní, hodně četl i psal u stolu. Jeho rukopis, obvykle pravidelný a úhledný, začal být roztřesený. Napsal svou poslední vůli. Kvůli astmatu strávil poslední dny vsedě v křesle. Ještě 5. ledna 1855 napsal kratičký dopis správci university. Žádal o opravy škvír v dřevěném obložení obývacího pokoje a nový nátěr. A to byl asi poslední Gaussův písemný projev.

Stav nemocného se kolísavě horšil a lepšil. 21. února jej jeho přítel Sartorius krátce viděl brzy odpoledne, i když jen na okamžik. Gaussovo vědomí bylo jasné, ale bylo cítit, že smrt už je blízko. Sartorius stiskl Gaussovi naposled ruku a odešel. Dalšího dne odpoledne Gausse stihl srdeční záchvat. Večer se zdálo, že jeho stav se ještě zlepší. Oči měl sice zavřeny, ale slyšel a vnímal všechno. Řekl si i o sklenici vody. Jeho důvěrní přátelé byli ve vedlejším pokoji a doufali ve zlepšení. Srdce stále bilo, ale čím dál pomaleji, až se v 1:05 dne 23. února 1855 zastavilo.

●

Další citace z [1]: C. F. Gauss uzavřel svůj pozemský život ve svém pokoji, v křesle, na scéně své 40leté práce. Odtud jeho nesmrtelný duch vystoupil na nebesa, aby tam rozjímal o čisté pravdě ve věčném světle, jehož tajemná pravidla se snažil s posvátnou vážností objevovat z hvězdných nápisů na nebeské klenbě.

Se svolením příbuzných byla den po Gaussově smrti provedena pečlivá pitva (doktoři Baum, Listing, Wagner a profesoři Förster, Fuchs a Henle). Lebka a mozek se pečlivě měřily a vážily. Wagner referoval, že mozky Gausse a později Dirichleta (**U**1859) měly bohaté a hluboké závity, nejpozoruhodnější jaké kdy viděl. Nejvýraznější na frontální straně. Jiné specifické znaky nebo tvary se nezjistily. Gaussův mozek měl i s blánami hmotnost 1 492g, po odstranění blan, zbytků krve a moku vážil 1 410g. To bylo poměrně dost, uvážíme-li, že Gauss byl střední postavy a měl už skoro 78 let. (Einsteinův mozek proti tomu vážil jen 1 230g (LIVIO, M.: Neřešitelná rovnice. Argo/Dokořán Praha 2008)).

Modernizovaně a dost odlišně líčí poslední fázi Gaussova života autor knihy [30].

Časový souhrn Gaussova života uvádí Dodatek (str. 43) vypracovaný Gaussovou společností v Hamburgu [41]. V odkazech [42-44] jsou další Gaussovy portréty, fotografie památníků apod.

ODKAZY

1. DUNNINGTON, G. W.: Carl Frederick Gauss: Titan of Science. MAA *2003* http://books.google.cz/books?id=4mwSrfxBSzkC&dq=Dunnington:+Carl+Friedrich+Gauss,+titan+of+Science&printsec=frontcover&source=bn&hl=cs&sa=X&oi=book_result&resnum=4&ct=result#PPP1,M1 .

2. www.koutny-math.com.
3. http://www.zas.cz/download/newton-predn.pdf (přednáška: Newton,…)
4. http://www.jstor.org/pss/2321863 (počet prvočísel Legendre, Gauss).
5. RAO, K. S. – BERGHE, G. V., Gauss, Ramanujan and Hypergeometric Series Revisited (PDF-soubor na internetu).
6. LICHTENBERG, G. C.: Večery při svíčce. Praha *1958*.
7. http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/ComplexNumberOrigin.html .
8. KOŘÍNEK, V.: Základy algebry. NČSAV Praha *1956*.
9. http://bart.math.muni.cz/~fuchs/Efuchs/historie_pdf/6ferm.pdf
10. http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number .
11. http://mathpages.com/home/kmath487.htm (konstrukce 17-úhelníka).
12. http://mathworld.wolfram.com/GeometricConstruction.html (konstr. 17-úhelníka).
13. http://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss (CV = životopis)
14. http://www.nationmaster.com/encyclopedia/C.F.-Gauss (CV)
15. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Gauss.html (CV + obr.) .
16. http://mathsforeurope.digibel.be/cfgauss3.htm . (CV)
17. http://vedci.wz.cz/Osobnosti/Gauss_K_F.htm (CV).
18. http://svp.muni.cz/ukazat.php?docId=612 (Ceres).
19. http://cs.wikipedia.org/wiki/Ceres_(trpasli%C4%8D%C3%AD_planeta) (Ceres).
20. http://www.astro.cz/planetky/clanky.phtml?cislo=8 (Ceres).
21. RALSTON, A.: Základy numerické matematiky. Academia Praha *1973*.
    DĚMIDOVIČ, B. P. – ; !R?N, I. A.: Základy numerické matematiky. SNTL Praha *1966*.
22. OSTROWSKI, A. M.: Solution of Equations and Systems of Equations. New York – London *1960*.
23. http://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html (Legendreovy polynomy)
24. http://download.drahos.info/dfg.pdf (dif. geometrie)
25. BUREŠ, J. – HRUBČÍK, K.: Diferenciální geometrie křivek a ploch. Karolinum Praha *1998*.
26. GREEN, B.: Elegantní vesmír. MF Praha *2001*.
27. THORNE, K. S.: Černé díry a zborcený čas. MF Praha *2004*.
28. http://www.aldebaran.cz/astrofyzika/gravitace/otr.html (Obecná teorie relativity).
29. KAKU, M.: Hyperprostor. Argo Praha *2008*.
30. MLODINOW, L.: Eukleidovo okno. Slovart Banská Bystrica *2007*.
31. http://en.wikipedia.org/wiki/Hypergeometric_series .
32. http://mathworld.wolfram.com/GausssTest.html .
33. http://www.mai.liu.se/~halun/complex/elliptic/ (eliptické funkce).
34. http://mathworld.wolfram.com/JacobiEllipticFunctions.html (eliptické funkce).

35. KLEIN, F.: Vývoj matematiky v 19. století. http://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=NM36hgqmOLkC&oi=fnd&pg=PA1&dq=F.+Klein,+Development+of+mathematics+in+19th+century&ots=m5wVLvs44v&sig=MhgKl72Zikc6MnXw82dEXzlIg9c#PPA9,M1 .
36. BRDIČKA, M. – HLADÍK, A.: Teoretická mechanika. Academia Praha *1987*.
37. http://www.21stcenturysciencetech.com/articles/spring01/Electrodynamics.html (W. Weber)
38. http://geo.mff.cuni.cz/papers2.bin/magnet.pdf (Zemský magnetismus).
39. http://www.mathpages.com/rr/s8-06/8-06.htm (Gauss, D, elektromagnetická síla).
40. VOPĚNKA, P.: Vyprávění o kráse novobarokní matematiky. Práh Praha *2004*.
41. http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ign/gauss/gaussbio.html (časová data života)
42. http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Gauss.html (podobizny).
43. http://www.mathunion.org/uploads/RTEmagicC_Gauss-Portrait.jpg.jpg (podobizny).
44. http://img.photobucket.com:80/albums/v405/btl/Gauss_J_sketch.jpg (podobizna).
45. http://www.geocities.com/RainForest/Vines/2977/gauss/gallery/silhouette.jpg .
46. http://www.mathsong.com/cfgauss/Dunnington/1927/

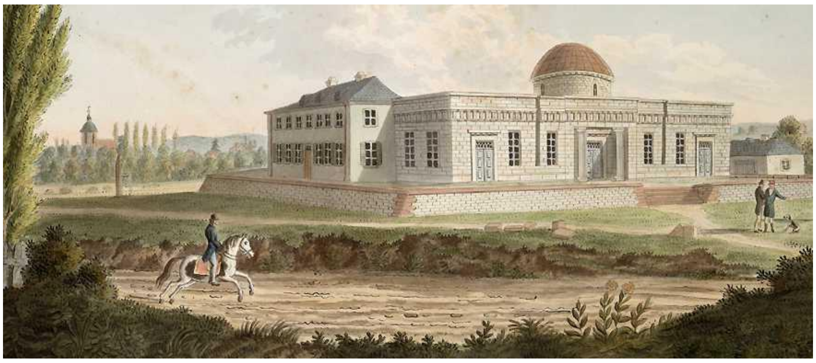
Dodatek: *Gaussův život v datech* [41]

1777	30. dubna: den narození, místo Braunschweig, Am Wendengraben Nr. 1550 Rodiče: Gebhard Dietrich Gauss (1744-1808), Dorothea (1743-1839)
1784 -1788	Národní škola Katharinen Volkschule, Braunschweig, učitel Büttner
1788 - 1792	Gymnázium Catharineum, Braunschweig
1791	Gauss je představen vévodovi Carlu Wilhelmovi Ferdinandovi, dostává stipendium Počátek matematického tvůrčího období
1792-1795	Collegium Karolinum v Braunschweigu (zárodek dnešní Technické university), od 18.2.
1792	Zkoumání výskytu prvočísel a další seznamování s číselně teoretickými problémy
1795-1798	Universita Georgia Augusta v Göttingen (zápis 15. 10. 1795), stipendium vévody z Brunšviku
1796	29. března: první zápis v deníku s objevem euklidovské konstrukce 17úhelníka. Rozhodnutí studovat matematiku. První publikace o konstrukci pravidelných mnohoúhelníků. Navázání přátelství s Wolfgangem Bolyaiem
1797	Zkoumání eliptických a lemniskátových funkcí
1798-1807	Soukromý vědec v Braunschweigu s vévodovým stipendiem
1799	Poslední setkání s Bolyaiem v Clausthalu. 16. června promoce v Helmstedtu (v nepřítomnosti) na základě disertace s důkazem základní věty algebry. Prominutí ústní zkoušky. V prosinci pobyt Gausse u Pfaffa v Helmstedtu
1799-1800	Písemné konzultace pruského nadporučíka C. L. von Lecoqa při trigonometrickém měření Vestfálska
1801	Vydání knihy ´Disquisitiones arithmeticae´ (Studium vyšší aritmetiky) Říjen: počátek astronomického tvůrčího období, výpočet dráhy planetky Ceres Prosinec: von Zach našel podle Gaussova výpočtu Ceres znovu
1802	1. ledna: Olbers také našel Ceres podle Gaussova výpočtu 12. února: jmenován členem korespondentem Petrohradské akademie věd 9. května: pozvání do Petrohradu, Gauss ho odmítl 20. října a zůstává v Braunsweigu 13. listopadu: členství v Královské společnosti věd v Göttingen (dnes Akademie věd)
1802-1807	Triangulace v Braunschweigu a okolí
1803	24. června – 6. července: návštěva přítele Olberse (1758-1840) v Brémách. Malíř portrétů Schwartz namaloval Gausse a Olberse (dnes je obraz na observatoři v Göttingen) 26. srpna: setkání s von Zachem na Brockenu (Harz). Gauss jej doprovází na Seeberg u Gothy a cvičí se tam v praktické astronomii
1804	30. ledna: korespondent Institute de France (oddělení geometrie) 12. dubna: člen Královské společnosti Londýn. Odmítnuto pozvání do Landshutu 21.12.: zač. korespondence s F. W. Besselem (1784-1846) po zprostředkování Olbersem
1805	Sňatek s Johannou Osthoff (1780-1809) z Braunschweigu
1806	21. srpna: narození syna Josepha (1806-1873) (jméno podle objevitele Ceres Piazziho)
1806	10. listopad: umírá vévoda Carl Wilhelm Ferdinand na zranění v bitvě u Auerstädtu
1807	26. červen – 15. červenec: u Olberse v Brémách, tam se setkal s Besselem. Povolán do Göttingen. 25. července jmenován řádným profesorem astronomie a ředitelem hvězdárny 21. listopad: přestěhování do Göttingen. Byt na rohu Turmstrasse/Kurze Strasse
1807-1855	Profesor astronomie v Göttingen
1808	29. února: narození dcery Wilhelminy (Minna) (1808-1840) pojmenované podle Olberse (objevitele druhé planetky Pallas) První přednášky. Jedním z posluchačů je Heinrich Christian Schumacher (1780-1850). 14. dubna: smrt otce v Braunschweigu

1809	Červen: vydání hlavní knihy o astronomii ´Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium´
	10. září: narození syna Louise (1809-1810)
	20. srpna: odmítnutí pozvání do Tartu (Dorpat), Estonsko
	11. října: umírá jeho žena Johanna. Cesta k Olbersovi do Brém (do 29. října)
1810	Lalandova cena, 1. března umírá syn Louis, 25. dubna odmítnutí pozvání do Berlína
	4. srpna: druhý sňatek – Friederica Wilhelmine Waldeck (1788-1831)
	Pozvání na universitu v Lipsku. Wilhelm von Humboldt zve Gausse do Berlína. Obě pozvání jsou odmítnuta
1811	29. června: narození syna Eugena (1811-1896). Zevrubné studium k teorii funkcí
1813	Pojednání o hypergeometrických řadách (Vědecká společnost Göttingen)
	23. října: narození syna Wilhelma (1813-1883) pojmenovaného podle Olberse
1814	9. července: poslední zápis v deníku
1815	Druhý důkaz základní věty algebry
1816	Třetí důkaz základní věty algebry.
	18.4.-23.5.: cesta se synem Josephem do Gothy (hvězdárna), Mnichova k výrobcům optiky (Joseph Fraunhofer (1787-1826)
	29. listopad: narození dcery Terezy (1816-1864).
	Říjen: stěhování do nové hvězdárny. 29. listopadu: jmenován král. dvorním radou
1818	Začátek období geodetických prací
	Říjen: cesta do Lüneburgu (geodetický průzkum, napojení na dánskou triangulaci)
1820	9. května: Gauss dostává oficiální zadání triangulace hannoverského království
	4. září: zahraniční člen Francouzské akademie věd
1821	Vynález a praktické odzkoušení heliotropu (přístroje pro světelnou signalizaci vzdálených měřicích cílů) v trojúhelníku Inselsberg – Brocken – Hoher Hagen.
	Odmítnuto pozvání do Hamburgu
	Výzkum diferenciální geometrie (v souvislosti s geodetickými pracemi)
	Vydání prvního čísla Astronomische Nachrichten
1824	5. dubna: čestný člen Petrohradské akademie
1825-1845	Triangulace Hannoverska. Měření prováděli G. W. Miller, F. Hartmann a J. Gauss, výpočet asi 2600 trigonometrických bodů provedl C. F. Gauss
1825	Červenec nebo srpen: dva dny na ostrově Wangerooge (Gaussova jediná cesta po moři)
	Srpen/září: cesta do Baden-Baden jako doprovod manželky při léčebném pobytu
1826	27. září: pobyt Alexandra von Humboldta v Göttingen
1827	Vydání knihy o diferenciální geometrii ´Disquisitiones generales circa superficies curvas´ (Obecné zkoumání zakřivených ploch)
1828	18.-24. září: 7. sněm německých přírodovědců a lékařů v Berlíně. Gauss bydlel jako host u von Humboldta (14.9. – 3.10.). První setkání s W. Weberem
1829	Výzkum kapilarity, princip nejmenší vázanosti v mechanice
1830	15. září: dcera Wilhelmina se vdává za profesora teologie a orientalistiky G. H. A. Ewalda
	13. říjen: syn Eugen odjíždí do Ameriky (tam je nejprve voják, později misionář)
1831	Duben: povolání W. Webera (1804-1891) jako profesora fyziky do Göttingen, 15. září nástup v Göttingen. Začíná Gaussovo angažmá ve fyzice. 12. září umírá Gaussova druhá žena. Domácnost začíná vést dcera Tereza.
1832	Sestavení systému absolutních jednotek CGS (Návrh předán Vědecké společnosti Göttingen 15. prosince; zveřejněno 1841)

1833	Duben: vynález a realizace elektromagnetického telegrafu (drátové vedení z fyzikálního kabinetu na hvězdárnu). Budování magnetické laboratoře (v Gaussově bytě)
	28. července: jednání s C. L. Gerlingem v Mündenu
1833-1834	Děkan filosofické fakulty
1834	Syn Joseph povýšen do významné funkce na železnici
1836	Duben-listopad: syn Josef v Americe (studium tamější železniční dopravy)
	Založení ´Společnosti pro magnetismus´ (Mezinárodní pracovní společnost pro studium zemského magnetismu)
1837	20. června: zemřel král Vilém IV, konec osobní koalice Hannoverska s Velkou Británií. Na trůn v Anglii nastupuje královna Viktorie, v Hannoveru Ernst August, vévoda z Cumberlandu (1771-1851). Počátek vydávání ´Výsledků pozorování Společnosti pro magnetismus´ (spolu s Weberem), publikace výsledků jimi založené mezinárodní vědecké společnosti (do 1843)
	6. září: Gauss dostává řádový kříž francouzské čestné legie
	14.-23. září: návštěva A. von Humboldta u Gausse
	19. září: oslova 100. výročí založení university Georgia Augusta. Gauss přednáší referát ´O novém přístroji pro měření zemského magnetismu navrženého pro přímé zjišťování změn horizontální složky magnetické intenzity´
	29. října: syn Wilhelm emigruje do USA (nejprve pracuje jako farmář, později jako velkoobchodník s obuví v St. Louis)
	1. listopadu: protest ´Göttingenských sedmi´, mezi nimi W. Weber a Gaussův zeť Ewald
	12. prosince: Weber je zbaven postavení, zůstane u Gausse do 1843, pak odchází do Lipska a 1849 se vrátí zpět do Göttingen
	Gauss se začíná učit rusky
1838	Udělení Copleyovy medaile Londýnské královské společnosti
	´Obecná teorie zemského magnetismu´ (výsledky z r. 1838, zveřejnění 1839)
1839	18. duben: v Göttingen umírá Gaussova matka Dorothea, rozená Benze ve věku 96 let
	Gauss se stává sekretářem Královské společnosti v Göttingen
	Říjen: kongres o magnetismu pod Gaussovým vedením s hosty z Anglie, Irska, Ruska
1840	18. března: syn Joseph si bere za ženu Sophii Erythropel (1818-1883) ve Stade
	Poslední Gaussovo tvůrčí období: různé oblasti matematiky, optiky, geodézie, astronomie
	12. srpna: smrt dcery Wilhelminy Ewaldové v Tübingen
1841-1842	Děkan filosofické fakulty podruhé
1841	Gauss se seznamuje s pracemi N. I. Lobačevského (neeuklidovská geometrie)
1842	31. května: udělení řádu Pour la mérite (za zásluhy)
	září: odmítnutí nabídky nástupu do Vídně
1843	První pojednání ´Zkoumání předmětů vyšší geodézie´ (předloženo Vědecké společnosti 23. října), uveřejněno 1844
1845-1846	Děkan filosofické fakulty potřetí
1845	1. července: jmenování tajným dvorním radou
1846	15. října: syn Joseph nastupuje jako stavební poradce na ředitelství Královských hannoverských železnic (vedení technických prací)
	Druhé pojednání ´Zkoumání předmětů vyšší geodézie´ (předloženo Vědecké společnosti 1. září), uveřejněno 1847
	16. prosince: zničení telegrafického vedení úderem blesku

1849	5. dubna: čestný člen university v Kazani (Rusko)
	10. dubna: narození vnuka Carla Augusta (1849-1927) – jediného vnuka v Německu
	8. července: čestné občanství města Braunschweig, 14. července: čestné občanství města Göttingen
	16. července: zlaté jubileum doktorské promoce – u této příležitosti: pojednání ´Příspěvky k teorii algebraických rovnic´ (obsahuje 4. důkaz základní věty algebry). Návštěvy:
	C. G. J. Jacobi, F. G. Lejeune Dirichlet a opožděně B. von Lindenau
1850	R. Dedekind (1831-1916) studuje u Gausse (zimní semestr 1850/51)
1851	Založení podpory pro vdovy po učitelích university; přitom vytvoření pojistné matematiky
1852	E. Schering (1833-1897) a A. Enneper (1830-1885) studují u Gausse
	Dedekind promuje u Gausse na základě disertace ´Základy teorie Eulerových integrálů´
1854	21. ledna: Gauss se musí kvůli srdečním a dalším problémům svěřit lékařské péči
	10. června: Habilitační přednáška B. Riemanna (1826-1866): ´O hypotézách, které tvoří základy geometrie´ za přítomnosti Gausse
	31. června: Otevření železniční trati Hannover-Göttingen (Gauss se zúčastnil jako divák)
	7. srpna: v Braunschweigu umírá nevlastní bratr Georg (*1769)
1855	23. února: 1:05h Gauss umírá v Göttingen.
	26. února: smuteční obřad a uložení do hrobu na hřbitově Albanifriedhof
	Král Jiří V. Hannoverský nechal razit pamětní medaile, na nichž je Gauss označen jako kníže matematiků, ´Mathematicorum princeps´



Hvězdárna v Göttingen (1816)

Hvězdárna v Göttingen (nyní) (http://en.wikipedia.org/wiki/File:Goe_Sternwarte_pano.jpg)