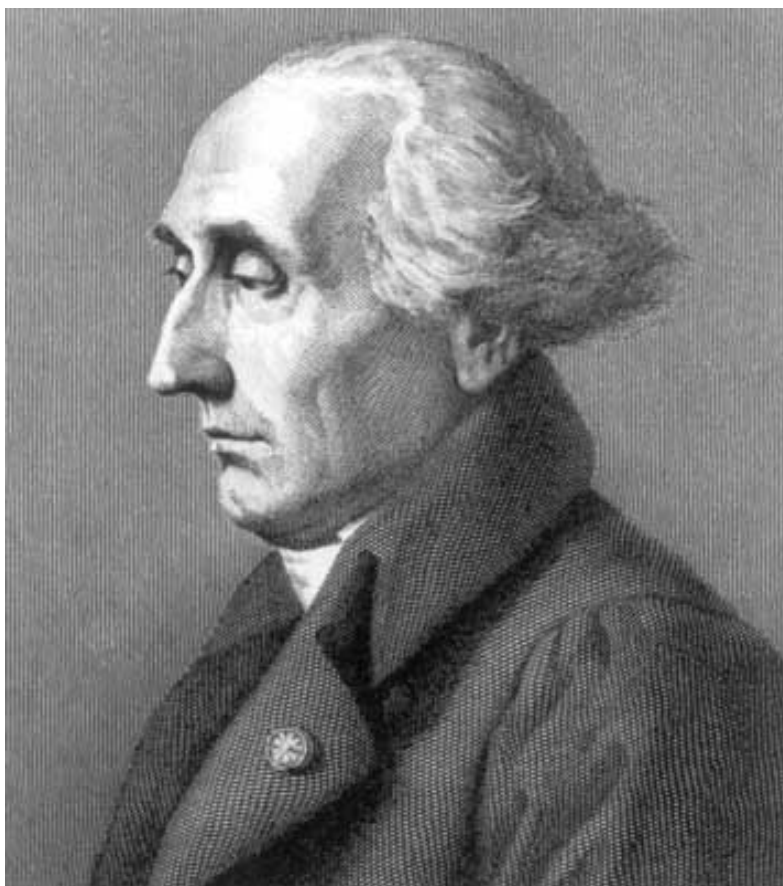


Joseph L. LAGRANGE

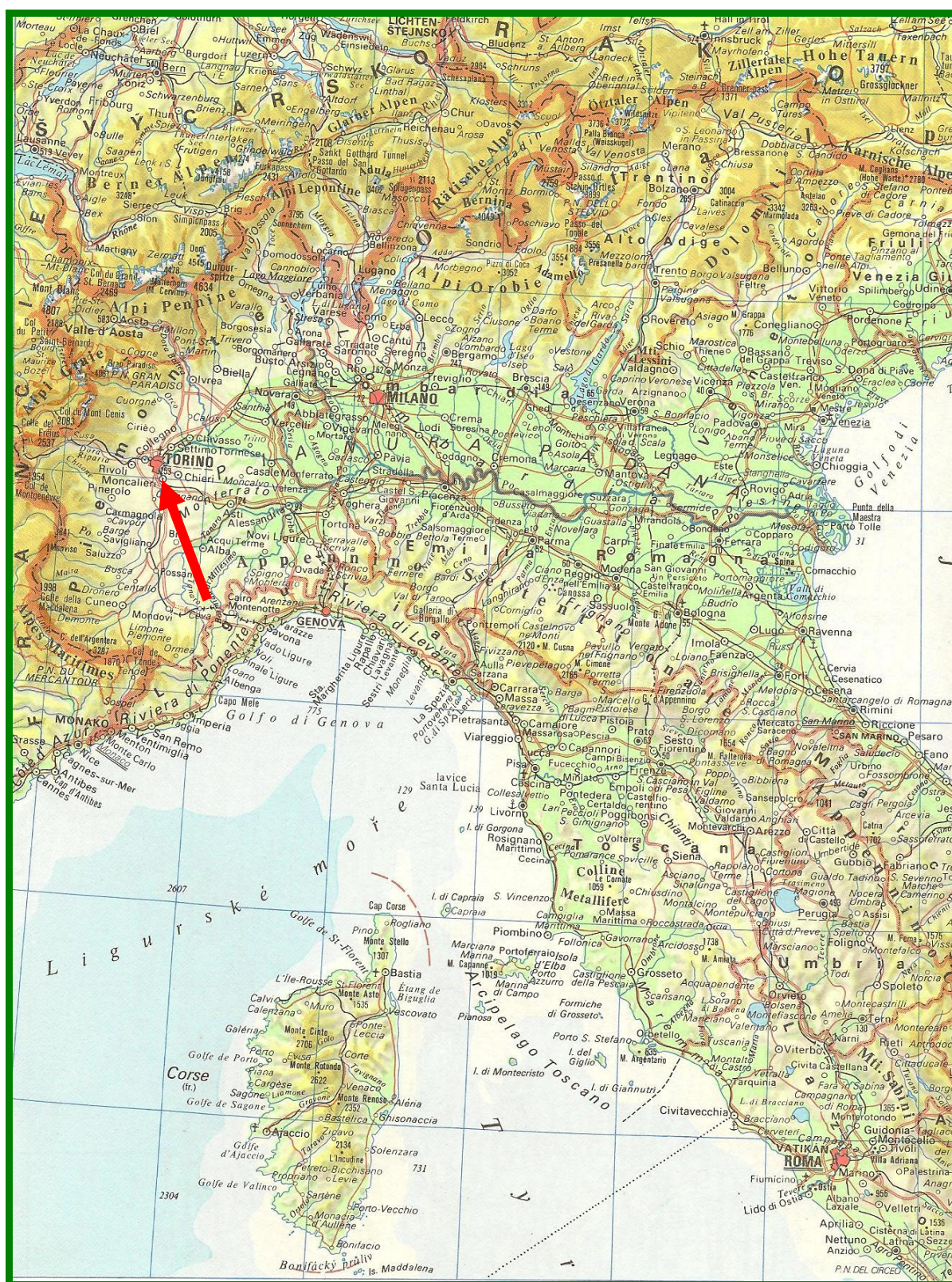
F. KOUTNÝ, Zlín



J. L. Lagrange

(25. 01. 1736 – 10. 04. 1813)

Joseph Louis Lagrange patří k největším matematikům 18. století. Byl skoro o 30 let mladší než L. Euler a v dílech obou je mnoho stejných témat. Původem Ital z Turína začal svou kariéru na tamní dělostřelecké škole. Po získání věhlasu se stal vedoucím matematické sekce akademie věd v Berlíně. Po 20 letech přešel do Paříže. Jeho životopisy jsou obvykle velmi kusé. Omezíme se na základní fakta a pokusíme se o stručný nástin Lagrangeových hlavních výsledků.



Místo Lagrangeova narození, dětství a mládí – Torino (Turín).

OBSAH

	Str.
ŽIVOTOPIS	1
Mládí	1
Berlín	3
Paříž	4
MATEMATIKA	7
Teorie čísel	7
Teorie grup	8
Lagrangeův interpolační polynom	9
Diferenciální počet	11
Podmíněné extrémy	14
Variační počet	17
Diferenciální rovnice	19
MECHANIKA	21
Pohyb hmotného bodu	21
Lagrangeovy rovnice 2. druhu	27
Proudění tekutin	35
Librační body	35
Librace Měsíce	39
VOLNÉ DOPLŇKY	40
ODKAZY	41

ŽIVOTOPIS

MLÁDÍ

Joseph Louis Lagrange se narodil v roce 1736 jako Guiseppe Lodovico Lagrangia v Turíně (Piedmont) na severu Itálie blízko hranic s Francií. Byl nejmladší z 11 dětí a z nich jen on se dožil dospělosti [1,2]. Jeho pradědeček z otcovy strany sem přišel z Touraine jako francouzský kapitán kavalérie. Lagrangeův otec byl pokladníkem Úřadu veřejných děl a opevnění – měl tedy dobré společenské postavení a byl bohatý. Ale než syn Joseph dospěl, otec špatnými spekulacemi o většinu majetku přišel. Mladý Lagrange se tedy musel spoléhat jen na vlastní schopnosti. Studoval práva na universitě v Turínu a před svým 17. rokem se o matematiku vůbec nezajímal. Budícím impulsem byl článek Edmunda Halleyho (1656–1742, kometa, financoval vydání Newtonových Principií) o použití algebry v optice, na který náhodně narazil. Sám a bez jakékoli cizí pomoci se vrhl do studia matematiky. A po roce nepřetržité dřiny se z něho stal už hotový matematik. Tak ve věku 19 let začal učit jako profesor matematiky na dělostřelecké škole v Turínu. Jen krátce nato se stal známý mezi vědci díky pracím o variačním počtu.

Když Euler odešel z Berlína v roce 1766, pozval pruský král Friedrich II. na jeho místo Lagrange [3]. V Berlíně žil až do smrti Friedricha II. (1786). V následujícím roce 1787 (ve věku 51 let) se odstěhoval do Paříže a stal se ředitelem matematické sekce Francouzské akademie věd.

Variační počet

Euler publikoval obsáhlejší výklad variačního počtu r. 1744. Lagrange podstatně přispěl k rozvoji variačního počtu svým čistě analytickým přístupem. Od roku 1754 pracoval na problémech souvisejících s brachistochronou (tautochronou), tj. křivkou, po níž se hmotný bod v konstantním gravitačním poli dostane z bodu A bez tření do níže položeného bodu B v nejkratším čase (stejném čase nezávisle na A). Přitom použil podobný postup jako při hledání extrému obyčejné diferencovatelné funkce [5]. Lagrange o svých výsledcích napsal Eulerovi v letech 1754–1756 několik dopisů. V nich objasnil, jak lze Eulerův postup podstatně zjednodušit. Vysvětlil “ δ -algoritmus” svého odvození základní diferenciální rovnice variačního počtu, která se dnes nazývá Eulerova-Lagrangeova rovnice. Svůj postup aplikoval také v klasické mechanice.

Euler mu napsal: “Vaše analytické řešení izoperimetrického problému neponechává nic, co by se mělo ještě objasnit, a já jsem nesmírně rád, že šťastný los připadl na Vás, abyste řešení problému dotáhl na nejvyšší stupeň dokonalosti a vytvořil teorii, kterou jsem od samého počátku rozvíjel jen já.”

Na Eulera udělaly Lagrangeovy výsledky silný dojem. Dokonce se říkalo, že “se zdvořilostí pro něj typickou pozdržel publikaci své již napsané práce, aby mladý Ital měl dost času na dokončení práce a mohl si dělat nárok na objev nové disciplíny”. Dnes se však toto rytířské jednání nepovažuje za zcela jednoznačné. Lagrange publikoval svou metodu ve dvou příspěvcích Turínské společnosti v letech 1762 a 1773.

Miscellanea Taurinensia

Roku 1758 Lagrange za podpory svých žáků založil společnost, která byla později začleněna do Turínské akademie věd a většina jeho počátečních prací byla otištěna v pěti svazcích aktualit známých jako *Miscellanea Taurinensia*. Mnohé příspěvky v těchto sbornících byly teprve elaboráty.

První svazek obsahuje příspěvek k teorii šíření zvuku a ukazuje chybu, kterou udělal Newton. Odvozuje obecnou diferenciální rovnici pohybu a integruje ji pro pohyb vlny po přímce. Tento svazek také obsahuje úplné řešení úlohy příčných kmitů struny, ukazuje na nedostatečnou obecnost řešení předložených B. Taylorem, d'Alembertem a Eulerem a dospívá k závěru, že obecný tvar struny v čase t popisuje funkce

$$y(x, t) = a \sin(mx) \sin(nt).$$

Příspěvek končí mistrovským objasněním ozvěn, rázů a interference. Jeho další články v tomto svazku pojednávají o rekurentních řadách, pravděpodobnosti a variačním počtu.

Druhý svazek obsahuje obšírnou práci shrnující výsledky několika příspěvků z prvního svazku. Týká se teorie a pojmů variačního počtu a ilustruje jeho aplikace na principu nejmenší akce v různých úlohách dynamiky.



Třetí svazek obsahuje řešení některých úloh dynamiky pomocí variačního počtu, několik příspěvků k integrálnímu počtu, řešení následující

Fermatovy úlohy: k danému přirozenému číslu n , které samo není čtvercem, najít takové x , aby $nx^2 + 1$ bylo čtvercem (viz str. 7), dále obecné diferenciální rovnice pohybu tří těles vzájemně přitahovaných gravitací.

Další práce dokončená v roce 1764 se týká librace Měsíce a pomocí virtuální práce vysvětluje, proč je Měsíc otočen k Zemi stále stejnou stranou. Řešení je zvlášť zajímavé tím, že obsahuje zárodek ideje zobecněných rovnic pohybu, tedy rovnic, které formálně dokázal později v roce 1780.

BERLÍN

Už v roce 1756 se Euler s podporou Maupertuise snažil, aby Lagrange přešel do Berlínské akademie. Později také d'Alembert jednal v Lagrangeův prospěch s králem Friedrichem II. a napsal Lagrangeovi, aby přijal prestižnější místo v Berlíně. Lagrange odmítl toto pozvání s tím, že

Mně se jeví, že Berlín, dokud tam je pan Euler, by pro mě nebyl vůbec vhodný.

Euler však v roce 1766 odjel z Berlína zpět do Petrohradu a Friedrich II. napsal Lagrangeovi osobní pozvání s přáním, aby "největší král v Evropě" měl u dvora "největšího evropského matematika". Lagrange se nakonec dal přesvědčit a příštích 20 let prožil v Prusku. Tam vytvořil nejen dlouhou řadu článků publikovaných v referátech berlínské a turínské akademie, ale napsal zde také monumentální dílo *Mécanique analytique*.

Během pobytu v Berlíně se Lagrange oženil. Jeho kolegové byli většinou ženatí a jejich manželky ho ujišťovaly, že manželství je jediná cesta ke šťastnému životu. Ale jeho žena brzy zemřela.

Lagrange byl královým oblíbencem a král s ním často debatoval o výhodách dokonalé pravidelnosti života. To si Lagrange přenesl také domů a studoval svou mysl a tělo, jakoby to byly stroje. Experimentálně stanovil přesné množství práce, které mohl vykonat, aniž by se zhroutil. Každého večera si stanovil definitivní úkol pro příští den; a po dokončení každé části napsal krátkou analýzu, aby viděl, které body v důkazech nebo promýšleném subjektu by se mohly zlepšit. Témata a náplň svých pojednání si vždy promýšlel dopředu, než je začal dávat dohromady, a pak obvykle psal přímo načisto, bez jediného škrtnutí nebo opravy.

Během 20 let strávených v Berlíně byl Lagrange extrémně vědecky aktivní. Napsal nejen velkolepou *Mécanique analytique*, ale zaslal 100 až 200 příspěvků do akademií v Turíně, v Berlíně a v Paříži. Některé příspěvky jsou skutečně rozsáhlá pojednání, ale všechny bez výjimky jsou opravdu vynikající díla. Kromě krátkého období, kdy byl nemocen, psal v průměru jeden článek za měsíc.

Především napsal příspěvky do 4. a 5. svazku *Miscellanea Taurinensia* 1766-1773. Z nich nejvýznamnější je příspěvek z roku 1771, ve kterém rozebírá problém, kolik astronomických pozorování je nutné kombinovat, aby se získal nejpravděpodobnější výsledek. Dále to jsou příspěvky do prvních dvou svazků referátů Turínské akademie 1784-1785. První se týká tlaku, kterým působí proudící tekutina na pevná tělesa a druhý pojednává o integraci pomocí nekonečných řad a o třídě úloh, pro něž je tato metoda vhodná.

Většina pojednání zaslaných do Paříže se týkala astronomických otázek. Mezi nimi je nutno jmenovat článek z roku 1766 o systému Jupitera, studii k problému tří těles z roku 1772, práci o sekulární rovnici Měsíce z roku 1773 a pojednání o perturbacích drah komet z roku 1778. Všechny tyto práce byly napsány na náměty navržené Francouzskou akademií a za každou z nich Lagrange získal cenu akademie.

PAŘÍŽ

V roce 1786 pruský král Friedrich II. zemřel a Lagrange, pro něhož klima Berlína nebylo zrovna přívětivé, rád přijal nabídku francouzského krále Ludvíka XVI. k přestěhování do Paříže. Podobná pozvání dostal také ze Španělska a z Neapole. Ve Francii byl přijat velmi uctivě, v Louvru pro něj bylo připraveno zvláštní ubytování. Hned se stal členem Francouzské akademie, která se později stala součástí Národního institutu. Na začátku pobytu v Paříži přepadl Lagrange záchvat melancholie. Nový výtisk jeho *Mécanique*, na níž pracoval přes čtvrt století, zůstal přes 2 roky ležet na jeho stole bez otevření. Z letargie ho probírala jen zvědavost na výsledky Francouzské revoluce. Ale s pozdějším vývojem revoluce se zvědavost změnila v obavy.

V této atmosféře roku 1792 jeho neutěšitelný životní smutek a ostýchavost vzbudily soucit dcery kolegy astronoma Le Monniera a ta trvala na tom, že se za něj provdá. Osvědčila se jako oddaná žena a pečlivě se o něho starala. V říjnu 1793 vyšel dekret, který nařizoval všem cizincům, aby opustili Francii – se jmenovitou výjimkou Lagrange, kterou zařídil slavný chemik Antoine Lavoisier (1794 odsouzen revolučním tribunálem a po jednodenním procesu s 27 dalšími popraven na gilotině). Lagrange považoval své postavení za tak nebezpečné, že se připravoval k útěku. Bylo mu však nabídnuto předsednictví v komisi pro reformu měř a vah. V této funkci měl značný podíl na prosazení decimální soustavy. Jeho vliv se projevil ve výběru jednotek, které nakonec komise v roce 1799 schválila. Lagrange byl v roce 1795 jedním ze zakládajících členů instituce Bureau des Longitudes (Úřad pro délky).

Ačkoli Lagrange byl odhodlán utéci z Francie, dokud byl ještě čas, nebyl vlastně nikdy v přímém nebezpečí. Naopak, byly mu od různých revolučních vlád a později také od Napoleona udíleny pocty a vyznamenání. Jemu prokazovaný respekt byl až překvapující. Tak v roce 1796 francouzský komisař v Itálii dostal příkaz zachovat nedotčeno vlastnictví Lagrangeova otce a vyjádřit mu blahopřání francouzské republiky k úspěchům jeho syna, který “svým geniem dělá čest celému lidstvu a který se narodil ke slávě Piedmontu“.

Lze jen dodat, že také Napoleon po získání moci, intenzívně podporoval vědecké studie ve Francii a obecně byl vědě příznivě nakloněn (údajně jako mladý důstojník ve vězení objevil tzv. “srdce“ trojúhelníka [5]). Napoleon prohlásil: *Lagrange je vysoká pyramida matematické vědy*. Roku 1808 jej jmenoval hrabětem.

École normale

Lagrange roku 1795 dostal katedru matematiky na nově zřízené École normale, která existovala teprve 4 měsíce. Jeho přednášky byly docela elementární, neobsahovaly žádné nové výsledky. Ale přesto byly publikovány, protože profesori se museli “zavázat, že budou reprezentovat lid a nebudou přednášet nebo mluvit z paměti.“ Také diskuse se musely ve stručnosti zapisovat, aby zástupci lidu mohli kontrolovat, jak se profesori osvědčují v zájmu republiky.

École polytechnique

Lagrange byl jmenován profesorem École polytechnique v roce 1794. Jeho přednášky popsali matematici, kteří měli to štěstí, že na nich mohli bývat, jako téměř dokonalé – formou i náplní. Počínaje nejjednoduššími fakty Lagrange vedl posluchače dál, až se, aniž si to uvědomili, ocitli za dosavadními hranicemi předmětu. Na jeho žáky dělalo dojem především používání obecných metod vyjádřených v symetrických pojmech.

Na druhé straně J. B. J. Fourier, který v roce 1795 chodil na jeho přednášky, napsal: “Jeho hlas je velmi jednotvárný, přinejmenším se nikdy nenadchne. Má velmi silný italský přízvuk a vyslovuje ‘s’ jako ‘z’... Každý ví, že je mimořádný muž, ale museli byste ho poznat jako učenice. Mluví jen při diskusích a mnohdy to, co řekne, vypadá směšně. Jednou řekl: ‘O tomto objektu se dá říci velmi mnoho faktů, ale já je neřeknu.’ Většina studentů není schopna jeho génia ocenit a není z něj nijak nadšena, ale profesori se to snaží napravit.”

*Některé pocty:*

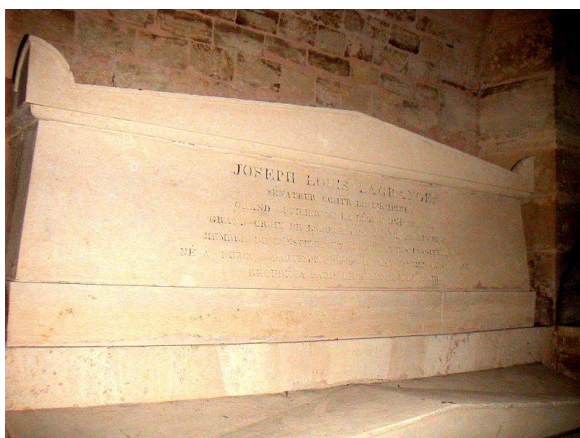
Ředitel matem. sekcí Berlin Academie (1766), Académie des Sciences (Paříž, 1787),
Fellow of the Royal Society of Edinburgh (1790), Fellow of the Royal Society (1791),
Crater Lagrange na Měsíci,
Paříž: jeho jméno na pamětní desce na Eiffelově věži, ulice Rue Lagrange

Pozdní léta

V roce 1810 Lagrange začal důkladnou revizi své *Mécanique analytique*. Byl ale schopen dojít jen do dvou třetin, než 1813 zemřel. Tento ‘philosophe sans rier’ (filosof bez křiku) prý den před smrtí řekl: “Ma vie est là!” (můj život je tam) a naznačil mozek.

V tomtéž roce byl pochován v Panthéonu v Paříži. Francouzský nápis na jeho hrobě říká:

Joseph Louis Lagrange. Sénateur. Hrabě císařství. Vysoký důstojník Čestné legie. Velký kříž císařského řádu znovusjednocení. Člen Institutu a Úřadu pro délky (Bureau des Longitudes). Narozen v Turíně 25. ledna 1736. Zemřel 10. dubna 1813.



Lagrangeův hrob v Panthéonu v Paříži.

V [6] se můžeme dočíst, že Lagrange byl plachý člověk, který úzkostlivě dodržoval pravidelný denní režim, vyhýbal se jakýmkoli konfliktům a na běžné otázky odpovídal “Je ne sais pas” (já nevím). Vypadal, že se nezajímá o nic jiného než o matematiku.

Říká se, že jednou se Lagrange domníval, že se mu podařilo dokázat 5. Euklidův axiom (axiom o rovnoběžkách). Připravil si o tom referát a když jej v akademii předčítal, náhle uviděl v řetězci úvah chybu. Beze slova papíry složil, vstrčil do kapsy a odešel.

Známe-li jeho lidskou stránku, mohou nám připadat jeho vědecké výsledky trochu méně výjimečné a ne zcela bezvýhradně zaručené [6]. Při své neúnavné snaze jít za ideálem dokonalosti, kterého se mu ovšem nemohlo podařit dosáhnout, Lagrange – téměř v ústraní – poskytl dalším generacím nástroje potřebné pro další přiblížení k tomuto ideálu.

Z dnešního pohledu lze jeho výsledky dělit na příspěvky

- k *matematice* a
- ke *klasické mechanice a astronomii*.

Následující stránky věnujeme Lagrangeovým pracím v těchto vědních oborech.



MATEMATIKA

► Teorie čísel

Lagrange se, podobně jako Euler [4,5], zabýval mnoha domněnkami a tvrzeními, které po sobě bez důkazu zanechal P. Fermat (1601–1665). Podal např. důkaz, že rovnice

$$y^2 - nx^2 = 1$$

pro přirozené n , které není čtvercem celého čísla, má v oboru celých čísel vždy řešení (je to jedna z tzv. diofantických rovnic [7], tj. rovnic s celočíselným řešením; Diofantos, 3. stol. n.l. [8]). Lagrange dokázal, že všechna řešení lze najít vyjádřením $\sqrt{n}$ ve tvaru řetězového zlomku.

Příklady (x, y) pro $x < 1000$:

$n = 2$	$n = 3$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 20$	$n = 222$
(2, 3)	(1, 2)	(2, 5)	(3, 8)	(1, 3)	(2, 9)	(10, 149)
(12, 17)	(4, 7)	(20, 49)	(48, 127)	(6, 17)	(36, 161)	
(70, 99)	(15, 26)	(198, 485)	(765, 2024)	(35, 99)	(646, 2889)	
(408, 577)	(56, 97)			(204, 577)		
	(209, 362)					
	(780, 1351)					

Poznámka. Je-li n čtvercem přirozeného čísla, $n = m^2$, je $nx^2 = m^2x^2 = z^2$ a rovnici $y^2 - nx^2 = 1$ lze přepsat do tvaru $y^2 = z^2 + 1$. V oboru kladných reálných čísel je pak $y > z$. V oboru přirozených čísel $y = z + k$, kde $k = 1, 2, \dots$. Pak $y^2 = (z + k)^2 = z^2 + 2kz + k^2 = z^2 + 1$, tedy $z = (1 - k^2)/(2k)$, což pro $k = 1, 2, \dots$ není ani kladné číslo.

Eulerova–Lagrangeova věta. Každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet nejvýš 4 čtverců přirozených čísel. (Lagrange publikoval její první důkaz 1770).

Příklady:

$$9 = 3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2,$$

$$16 = 4^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2,$$

$$26 = 5^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 = 4^2 + 3^2 + 1^2,$$

$$161\,364 = 361^2 + 169^2 + 49^2 + 9^2 = 400^2 + 36^2 + 8^2 + 2^2,$$

...

Lagrange dokázal **Wilsonovu větu**: Je-li p prvočíslo, je $(p - 1)! + 1$ násobkem p .

To se dá zapsat jako $p \mid [(p - 1)! + 1]$ nebo $(p - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Důkaz je v knize [7], str. 89.

Ilustrace:

Prvočíslo p	2	3	5	7	11	13	17
$P = (p-1)!+1$	$(2-1)!+1=2$	3	25	721	3 628 801	479 001 601	20 922 789 888 001
P/p	1	1	5	103	329 891	36 846 277	1 230 752 346 353

► Teorie grup

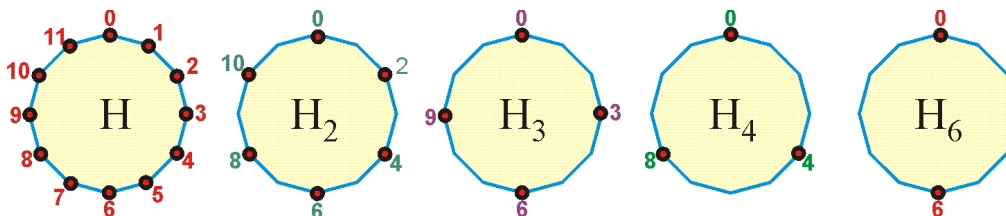
Grupa je dvojice (G, o) , kde G je nějaká množina a o je binární operace na G , tj. každé dvojici prvků $x, y \in G$ je přiřazen nějaký prvek $z \in G$, $z = xoy$, přičemž

- (1) $(aob)oc = ao(boc)$ asociativní zákon,
- (2) existuje neutrální prvek operace o , tj. takový prvek e , že $eo = e$,
- (3) ke každému $a \in G$ existuje opačný (inverzní) prvek a^* , tj. $aoa^* = a^*oa = e$.

V množině G lze někdy najít podmnožinu G_{sub} , která je při stejné operaci o také grupou. Pak říkáme, že (G_{sub}, o) je podgrupou (G, o) .

Příklady.

1. Množina celých čísel s operací sčítání, $(\mathbb{Z}, +)$ je grupa (asociativní zákon je zřejmý, neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem ke k , $k^* = -k$, je opačné číslo k celému číslu k). Množina sudých čísel $S = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ se sčítáním, tedy $(S, +)$, je podgrupou $(\mathbb{Z}, +)$. Obě grupy $\mathbb{Z}$ a S jsou nekonečné.
2. Dvanáctiúhelník s množinou vrcholů $H = \{0, 1, \dots, 11\}$ (hodiny, na nichž je 0 místo 12) s operací $+$ znamenající otočení ručičky v záporném smyslu o 30° (přidání 1 hodiny), grupa $H_2 = \{0, 2, \dots, 10\}$ s $+$ značícím pootočení o 60° (přidání 2 hodin), grupa $H_3 = \{0, 3, 6, 9\}$ s otočením o 90° , grupy $H_4 = \{0, 4, 8\}$ s pootočením o 120° , $H_6 = \{0, 6\}$ s otočením 180° . H, H_2, H_3, H_4, H_6 jsou grupy s 12, 6, 4, 3, 2 prvky a H_2, H_3, H_4, H_6 jsou podgrupy H , H_4 je podgrupou H_2 atd. Počet n prvků grupy (G, o) vytvořené z jednoho prvku $g \in G$ operací o , tj. množiny $\{g, go, \dots, go\dots o g = 0\}$ se nazývá řád grupy (G, o) . H má tedy řád 12, H_2 má řád 6, ..., H_6 má řád 2 (obr. 1).



Obr. 1 – Grupa H a její podgrupy $H_2, \dots, H_6$.

Lagrangeova věta. Řád grupy je násobkem řádu každé její podgrupy.

Důkaz a další detaily bývají uvedeny v učebnicích algebry, např. [10].

V příkladě 1 lze podgrupu S vytvořit z čísla 2 přičítáním 2 a inverzního prvku -2 . S má řád $\aleph_0$ rovný mohutnosti množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ (a také $\mathbb{Z}$) [11].

V příkladě 2 je 12 násobkem 6 (řád podgrupy H_2), 4 (řád H_3), 3 (řád H_4), 2 (řád H_6).

Je třeba poznamenat, Lagrange takto abstraktně svou větu neformuloval. Objevil ji v souvislosti s manipulacemi s kořeny algebraických rovnic (permutace, symetrické funkce [10]). Jeho úvahy se však staly východiskem pro další matematiky, kteří později vytvořili teorii grup jako prostředek k objasnění problému řešitelnosti algebraických rovnic (N. H. Abel, E. Galois [10]).

► Lagrangeův interpolační polynom

Mějme v rovině Oxy sadu bodů (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, takových, že $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Zvolme nějaké k z množiny $\{1, \dots, n\}$, např. $k = 2$. Polynom stupně $n - 1$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} = \frac{\prod_{i \in \{1, \dots, n\} - \{2\}} (x - x_i)}{\prod_{i \in \{1, \dots, n\} - \{2\}} (x_2 - x_i)}$$

je, jak je hned vidět, v bodě x_2 roven 1 a v bodech x_i pro $i \neq k$ roven 0.

Takto lze pro $k = 1, \dots, n$ sestavit polynomy $p_k(x)$ stupně $n - 1$, pro něž

$$p_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = x_k \\ 0 & \text{pro } x = x_i, i \neq k \end{cases}$$

Po vynásobení každého z nich y_k a sčítáním dostáváme polynom stupně $n - 1$, který prochází všemi body (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$

$$L(x) = p_1(x) y_1 + \dots + p_n(x) y_n = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i \in \{1, \dots, n\} - \{k\}} (x - x_i)}{\prod_{i \in \{1, \dots, n\} - \{k\}} (x_k - x_i)} y_k.$$

Tímto způsobem sestrojený polynom $L(x)$ se nazývá Lagrangeův interpolační polynom. Protože horizontální vzdálenosti interpolačních uzlů, $x_{i+1} - x_i$, $i = 1, \dots, n-1$, mohou být různé, představuje L hodně obecný nástroj k propojení množiny bodů (x_i, y_i) spojitou a hladkou funkcí.

Lagrangeův polynom je spíš teoretický nástroj. Lze jej použít ke konstrukci numerických metod – např. interpolace, integrace apod. V konkrétních úlohách bývá nahrazován vhodnějšími speciálními polynomy, např. s ekvidistantními uzly, polynomy se zadanými uzly i derivacemi, ortogonálními polynomy [13] nebo splajny (spline), což jsou ‘slepence’ spojitě na sebe navázaných polynomů stejného stupně [13-15].

Příklad. Pět interpolacími uzly

$$(x_1, y_1) = (1, 2), (x_2, y_2) = (2, 1), (x_3, y_3) = (3, 2), (x_4, y_4) = (4, 0), (x_5, y_5) = (6, 2)$$

prochází Lagrangeův polynom

$$\begin{aligned} L(x) = & \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-6)} \times 2 + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-6)} \times 1 \\ & + \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-6)} \times 2 + \frac{(x-1) \dots (x-6)}{(4-1) \dots (4-6)} \times 0 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)} \times 2. \end{aligned}$$

Polynom L v tomto tvaru lze už použít k numerickým výpočtům. Kvůli numerické stabilitě je vhodné jednotlivé členy počítat jako součiny zlomků. Pro dané x to např. znamená počítat první sčítanec na pravé straně jako

$$\left(\frac{x-2}{1-2}\right) \times \left(\frac{x-3}{1-3}\right) \times \left(\frac{x-4}{1-4}\right) \times \left(\frac{x-6}{1-6}\right) \times 2.$$

V našem případě, kdy počet interpolačních uzlů je 5, tedy nízký, se dá L snadno upravit do obvyklého tvaru lineární kombinace mocnin x

$$L(x),$$

resp. do Hornerova tvaru vhodného pro numerické výpočty

$$L(x) = (((\frac{7}{24}x - \frac{15}{4})x + \frac{389}{24})x - \frac{111}{4})x + 17.$$

Kdybychom měli dáno víc interpolačních uzlů, třeba $n = 20$, stupeň Lagrangeova polynomu $n-1$ by byl vysoký a průběh polynomu vysokého stupně by mohl být docela divoký.

Lidské myšlení má ale obecně averzi vůči složitosti. Proto je přijatelnější zvolit pevně nízký stupeň, sestavit pro každé dva sousední uzly polynom procházející těmito uzly a splňující podmínky navázání – a po intervalech jednotlivé úseky skládat. Vznikne tak slepenec, spline (český tvar splajn) [13]. Nejjednodušším spojitým splajnem je lineární splajn, tj. sjednocení spojnic sousedních interpolačních uzlů – lomená čára. U té další možnosti volby nejsou.

Přirozený kubický splajn S se skládá z částí vytvořených kubickými polynomy

$$C_{k, k+1}(x) = a_k (x - x_k)^3 + b_k (x - x_k)^2 + c_k (x - x_k) + d_k, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

které na sebe hladce navazují a v krajních bodech, $k = 1$ a $k = n$, mají nulovou křivost (jsou v nich přímé). Podrobnosti k výpočtu koeficientů splajnů jsou uvedeny např. v [13].

Na obr. 2 je vidět, že splajn S v intervalu interpolace $[1, 6]$ má menší křivost (je přímější) než polynom L , což je charakteristická vlastnost splajnů. Výpočty koeficientů dílčích polynomů splajnu stupně m vedou na soustavu $m \times (n-1)$ lineárních rovnic, jejíž řešení při větších n a např. $m = 3$ už není triviální úlohou. Proto se splajny začaly používat až s rozvojem počítačů po 2. světové válce [14].

Spline byl původně název pro dlouhé, pružné, snadno ohebné pravítko (lištu), které se používalo při stavbě lodí a později letadel pro kreslení hladkých křivek procházejících zadanými body [15].

► Diferenciální počet

Počáteční období rozvoje diferenciálního počtu provázely nejasnosti kolem pojmu derivace, které se odstranily až v 19. století přesnou definicí limity funkce [4,5]. Od Lagrange pochází označení derivací čárkami f' , f'' , ...

Lagrange se pojmu derivace jako limity definované pro funkci f výrazem [11,15]

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

vyhýbal a snažil se o algebraizaci diferenciálního počtu. Funkci v okolí daného bodu x nahradil lokálním polynomem (Taylorův rozvoj)

$$f(x+h) = f(x) + A_1(x)h + A_2(x)\frac{1}{2!}h^2 + \dots + A_n(x)\frac{1}{n!}h^n + R_{n+1}(x, h),$$

kde $R_{n+1}(x, h)$ je zbytek. Pak prostě definoval k -tou derivaci f v bodě x jako koeficient $A_k(x)$, tedy $f^{(k)}(x) = A_k(x)$.

Příklad. Podle známého vztahu pro sinus součtu úhlů je

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h.$$

Rozvoje sinu a kosinu v řady považujeme za známé [5,16,17]:

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots, \quad \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots,$$

takže

$$\begin{aligned} \sin(x+h) &= \sin x \left(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \dots\right) + \cos x \left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \frac{h^4}{4!} \sin x + \frac{h^5}{5!} \cos x - \dots \end{aligned}$$

Pak tedy koeficienty u $\frac{h^k}{k!}$ pro $k = 1, 2, \dots$ jsou k -té derivace sinu v bodě x :

$$\sin' x = \sin^{(1)} x = \cos x, \quad \sin'' x = \sin^{(2)} x = -\sin x, \quad \sin''' x = \sin^{(3)} x = -\cos x, \dots$$

Jakmile známe rozvoje funkcí v řady, stane se určení koeficientů u $\frac{h^k}{k!}$ algebraickou úlohou. Takový přístup není ovšem bez logických mezer a dá se používat jen u dostatečně hladkých, zejména tzv. analytických funkcí s derivacemi libovolného řádu. Znalost Taylorovy řady a problém její konvergence vedou zpět k pojmu limity.

Základním tvrzením je

věta o střední hodnotě (Lagrange). Je-li f reálná funkce spojitá v uzavřeném intervalu $[a, b]$ a diferencovatelná na jeho vnitřku (a, b) , pak existuje takové c , $a < c < b$, že

$$f(b) - f(a) = \frac{df}{dx}(c) (b - a).$$

Důkaz lze najít v učebnicích diferenciálního počtu, např. [15], nebo v [11].

U spojitě funkce lze k libovolnému $\varepsilon > 0$ najít $h > 0$ takové, že pro t blízké x , přesněji $x - h < t < x + h$, jsou hodnoty $f(t)$ blízké $f(x)$, $f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$. Pak integraci přes interval $(x, x+h)$ dostáváme

$$(f(x) - \varepsilon) h = \int_x^{x+h} (f(t) - \varepsilon) dt < \int_x^{x+h} f(t) dt < \int_x^{x+h} (f(t) + \varepsilon) dt = (f(x) + \varepsilon) h.$$

Z těchto nerovností dělením $h > 0$ plyne

$$f(x) - \varepsilon < \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt < f(x) + \varepsilon.$$

Definujeme-li pro u_0, u z definičního oboru f funkci $F(u) = \int_{u_0}^u f(t) dt$, můžeme dát předchozí nerovnosti tvar

$$f(x) - \varepsilon < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x) + \varepsilon.$$

Limitním přechodem $h \rightarrow 0$ dostaneme

$$f(x) - \varepsilon \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Jelikož $\varepsilon > 0$ je libovolné, je $F'(x) = f(x)$. Tím jsme dokázali, že derivováním integrálu spojitě funkce podle horní meze dostaneme funkční hodnotu integrandu pro tuto horní mez integrálu. Podle věty o střední hodnotě tedy dostaneme pro spojitou funkci f

větu o střední hodnotě integrálního počtu

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = f(\theta) (b - a), \text{ kde } a < \theta < b.$$

Vraťme se nyní k aproximaci funkce Taylorovým polynomem

$$f(x) = f(a) + A_1(x-a) + A_2 \frac{1}{2!} (x-a)^2 + \dots + A_n \frac{1}{n!} (x-a)^n + R_{n+1}(a, x-a).$$

Výsledkem $(n+1)$ -násobného derivování této rovnosti podle x je rovnost

$$R_{n+1}^{(n+1)}(a, x-a) = f^{(n+1)}(x).$$

Její integraci dostaneme

$$R_{n+1}^{(n)}(a, x-a) = \int_a^x f^{(n+1)}(t) dt.$$

Podle věty o střední hodnotě existuje $\xi, a < \xi < b$ takové, že

$$R_{n+1}^{(n)}(a, x-a) = f^{(n+1)}(\xi) (x-a).$$

Další integrace přes interval $[a, x]$ dá postupně

$$R_{n+1}^{(n-1)}(a, x-a) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-a)^2}{2!},$$

...

$$R_{n+1}(a, x-a) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Na posledním řádku je **zbytek Taylorova rozvoje funkce f v Lagrangeově tvaru**. Pro aspoň $(n+1)$ krát diferencovatelnou funkci f na intervalu obsahujícím body x a $x+h$ lze tedy psát

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{1}{2!}h^2 + \dots + f^{(n)}(x)\frac{1}{n!}h^n + f^{(n+1)}(\xi)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$

kde $x < \xi < x+h$.

Chyba aproximace je menší nebo rovna $M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$, kde $M = \max\{f^{(n+1)}(x): a < x < b\}$.

Příklad. Funkce $f(x) = x^2 e^{-x}$ je zřejmě spojitá a má derivace libovolného řádu. Ze známého rozvoje exponenciály v Taylorovu řadu dostaneme ihned

$$f(x) = x^2 (1 - x + x^2/2! - x^3/3! + \dots) = x^2 - x^3 + x^4/2! - x^5/3! + x^6/4! - \dots$$

Jednotlivé Taylorovy polynomy (obr. 3) tedy jsou

$$T_2 = x^2,$$

$$T_3 = x^2 - x^3,$$

$$T_4 = x^2 - x^3 + x^4/2!,$$

$$T_5 = x^2 - x^3 + x^4/2! - x^5/3!,$$

$$T_6 = x^2 - x^3 + x^4/2! - x^5/3! + x^6/4!,$$

...

$$T_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+2} / k!,$$

popř. derivace $f^{(k)}(0)$:

$$f^{(1)}(0) = f'(0) = 0,$$

$$f^{(2)}(0) = f''(0) = 1,$$

$$f^{(3)}(0) = f'''(0) = -1,$$

$$f^{(4)}(0) = f^{IV}(0) = 1/2,$$

$$f^{(5)}(0) = -1/3!,$$

$$f^{(6)}(0) = 1/4!,$$

...

$$f^{(k)}(0) = 1/(k-2)!,$$

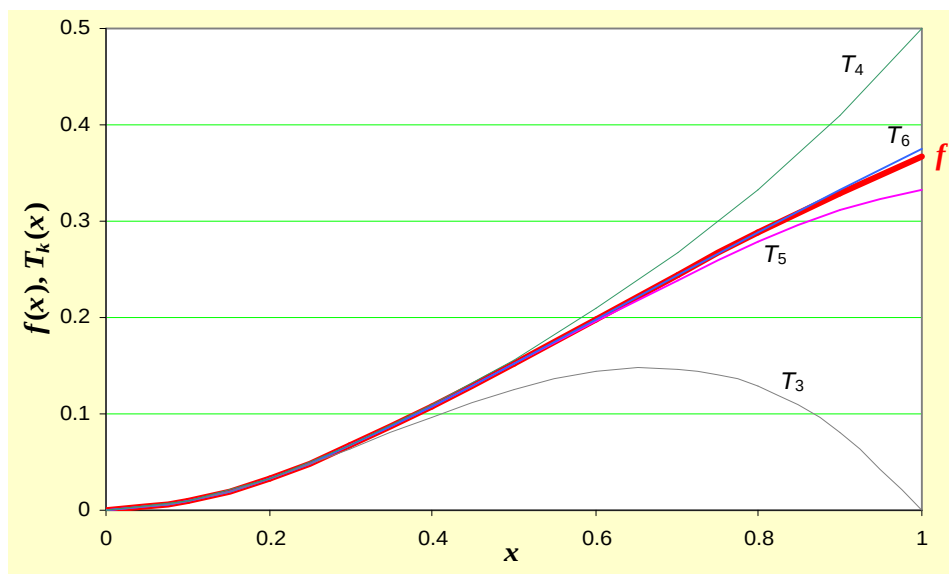
Protože Taylorovy polynomy jsou alternující (se střídavými znaménky členů), je odhad zbytku roven absolutní hodnotě dalšího členu Taylorova rozvoje [11]. V našem případě je zřejmé (obr. 3), že odchylka nabývá maxima v koncovém bodě $x = 1$. Je tedy (a ilustruje to i obr. 3)

$$|T_3(x) - f(x)| \leq |T_3(1) - f(1)| = |0 - e^{-1}| = e^{-1} = 0.367879... \leq \max\{x^4/2!: 0 \leq x \leq 1\} = 0.5,$$

$$|T_4(x) - f(x)| \leq |T_4(1) - f(1)| = |0.5 - e^{-1}| = 0.1321205... \leq \max\{x^5/3!: 0 \leq x \leq 1\} = 1/6 = 0.16666...$$

$$|T_5(x) - f(x)| \leq |T_5(1) - f(1)| = |1/3 - e^{-1}| = 0.034546... \leq \max\{x^6/4!: 0 \leq x \leq 1\} = 1/24 = 0.04166...$$

$$|T_6(x) - f(x)| \leq |T_6(1) - f(1)| = |0.375 - e^{-1}| = 0.00712... \leq \max\{x^7/5!: 0 \leq x \leq 1\} = 1/120 = 0.0083...$$



Obr. 3 – Funkce $f(x) = x^2 e^{-x}$ a její aproximace Taylorovými polynomy $T_3, \dots, T_6$ na intervalu $[0, 1]$.

► Podmíněné extrémy

Budiž funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ diferencovatelná v nějakém intervalu (nebo v jednoduše souvislé otevřené množině) G v n -rozměrném euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Nepodmíněné stacionární body funkce f jsou body $(x_1, \dots, x_n)$, v nichž gradient funkce f je nulový, tj. anulují se všechny derivace

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, \dots, x_n) = 0, \text{ pro } k = 1, \dots, n.$$

Význačnými stacionárními body jsou ty, v nichž funkce f dosahuje maxima nebo minima.

Oblast G ležící v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ může však mít dimenzi menší než n (nádlocha) a být tedy vymezena dalšími $m < n$ nezávislými podmínkami typu

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Nezávislost podmínek znamená, že m souřadnic je dáno jako implicitní funkce zbylých $n - m$ souřadnic. Pro jednoduchost zvolme za nezávislé souřadnice $x_{m+1}, \dots, x_n$ a souřadnice $x_1, \dots, x_m$ jsou pak jejich funkcemi, $x_k = \phi_k(x_{m+1}, \dots, x_n)$, $k = 1, \dots, m$. Tak se funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ na oblasti G stane funkcí $n - m$ proměnných

$$f(\phi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n).$$

V oblasti G se stacionární body hledají jako nepodmíněné extrémy, tedy řešením soustavy $n - m$ rovnic

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(\phi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0, \quad k = m+1, \dots, n.$$

Hledání stacionárních bodů tímto přímým způsobem (založeným na větě o implicitních funkcích [15,11]) může být u složitějších úloh obtížné.

Lagrange navrhl jednodušší, symetrický postup: všechny proměnné $x_1, \dots, x_n$ hrají stejnou roli a m podmínek reprezentují další proměnné $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Při hledání stacionárního bodu $f(x_1, \dots, x_n)$ za podmínek

$$g_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

stručně

$$(f(x_1, \dots, x_n) \mid g_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, \dots, m) \rightarrow \text{extr},$$

se sestaví pomocná funkce

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

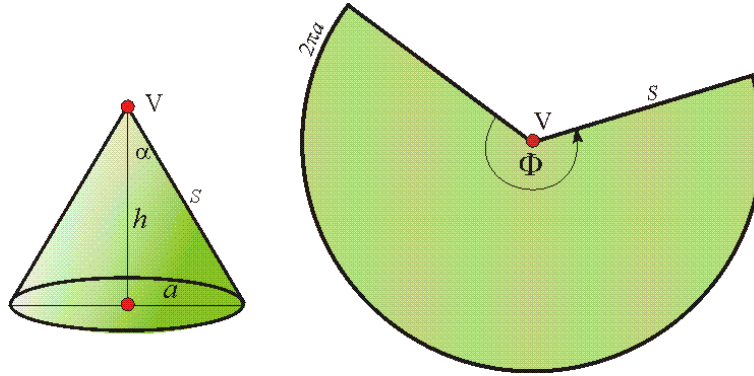
a hledá se její nepodmíněný extrém

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) &= 0, \quad k = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_k} F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) &= g_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Tím se dostane $n+m$ rovnic pro $n+m$ neznámých. Pro nově zavedené veličiny $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ se ujal název *Lagrangeovy multiplikátory* [11,15–17].

Hledání podmíněného extrému metodou přímé eliminace a metodou Lagrangeových multiplikátorů předvádí následující příklad.

Příklad. Hledejme kužel, který při zadané velikosti povrchu pláště má největší objem (čepice, obr. 4).



Obr 4 – Kužel a jeho rozvinutý plášť.

Označme výšku kužele h , poloměr podstavy a , délku povrchu pláště s a úhel mezi površkou a osou rotace kužele α . Plášť kužele se po rozvinutí do roviny stane kruhovou výsečí o poloměru $s = \sqrt{a^2 + h^2}$ určenou středovým úhlem $\Phi = 2\pi a/s$. Zadaný povrch pláště kužele je $S = \frac{1}{2} s^2 \Phi = \pi a s$. Objem kužele je $V = \frac{1}{3} \pi a^2 h$. Máme tedy řešit úlohu

$$\left(\frac{1}{3} \pi a^2 h \mid \pi a \sqrt{a^2 + h^2} - S = 0 \right) \rightarrow \text{extr.}$$

Vynecháme-li konstantní koeficienty π a $\frac{\pi}{3}$, které stacionaritu funkcí V a S neovlivňují, a položíme-li $A = S/\pi$, můžeme úlohu přepsat do jednoduššího tvaru

$$(a^2 h \mid a \sqrt{a^2 + h^2} - A = 0) \rightarrow \text{extr.}$$

Nyní použijeme obou metod.

1. *Redukce počtu proměnných.* Zřejmě (obr. 4) je $a = s \sin \alpha$, $h = s \cos \alpha$, načež podmínka přejde do tvaru $as - A = s^2 \sin \alpha - A = 0$. Odtud

$$\sin \alpha = A/s^2.$$

Objemový člen $a^2 h = (s \sin \alpha)^2 s \cos \alpha = s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$ se po dosazení za $\sin \alpha$ stane funkcí jen s :

$$a^2 h = f(s) = s^3 (A/s^2)^2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = s^3 (A/s^2)^2 \sqrt{1 - (A/s^2)^2} = A^2 s^{-1} (1 - A^2 s^{-4})^{1/2}.$$

Nutnou podmínkou extrému diferencovatelné funkce f je anulování její první derivace, tj.

$$f'(s) = -A^2 s^{-2} (1 - A^2 s^{-4})^{1/2} + A^2 s^{-1} \frac{1}{2} (1 - A^2 s^{-4})^{-1/2} (-A^2 (-4) s^{-5}) = 0.$$

Vynásobením obou stran poslední rovnosti $(1 - A^2 s^{-4})^{1/2}$ a jednoduchými úpravami dostaneme

$$-A^2 s^{-2} (1 - A^2 s^{-4}) + 2A^2 s^{-1} A^2 s^{-5} = A^2 s^{-2} (-1 + A^2 s^{-4} + 2A^2 s^{-4}) = A^2 s^{-2} (-1 + 3A^2 s^{-4}) = 0.$$

Z významu A a s plyne $A^2 s^{-2} \neq 0$, proto musí být $-1 + 3A^2 s^{-4} = 0$, tj. $3A^2 = s^4$ a

$$s = (3A^2)^{1/4}.$$

Nyní můžeme určit úhel α ,

$$\alpha = \arcsin (A/s^2) = \arcsin (A/(3A^2)^{2/4}) = \arcsin (\frac{1}{\sqrt{3}}) = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.6154797... \approx 35.264^\circ$$

a vypočítat $a = s \sin \alpha$, $h = s \cos \alpha$.

2. *Lagrangeův postup*. Řešení s proměnnými a , h je uvedeno v [11]. Zde použijeme proměnných s a α a budeme řešit úlohu

$$(s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \mid s^2 \sin \alpha - A = 0) \rightarrow \text{extr.}$$

Vytvoříme pomocnou funkci

$$F(s, \alpha, \lambda) = s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \lambda (s^2 \sin \alpha - A)$$

a její stacionární body najdeme řešením soustavy rovnic (anulování prvních derivací)

$$\frac{\partial}{\partial s} F(s, \alpha, \lambda) = 3s^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + 2\lambda s \sin \alpha = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(s, \alpha, \lambda) = s^3 (2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha) + \lambda s^2 \cos \alpha = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(s, \alpha, \lambda) = s^2 \sin \alpha - A = 0.$$

Z první rovnice této soustavy vyjde $\lambda = -\frac{3}{2} s \sin \alpha \cos \alpha$. Druhou rovnici vydělíme s^2 a dosadíme vypočtené λ . To po jednoduchých úpravách ($s > 0$, $0 < \alpha < \pi/2$) dá rovnost $\sin^2 \alpha = 1/3$. Tedy hned

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 35.264^\circ.$$

Poznámka 1. Uvedený příklad je jednoduchý, proto jsou oba postupy skoro stejně pracné. Ve složitějších případech však nalezení jedné nebo více proměnných jako funkcí jiných proměnných může být hodně obtížné a teprve pak se plně ocení výhodnost Lagrangeova přístupu.

Poznámka 2. Podmínky $g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$, $k = 1, \dots, m$, mají v mechanice význam vazeb. Např. hmotný bod matematického kyvadla v rovině se pohybuje po kružnici, prostorového kyvadla po povrchu koule. Při pohybu se minimalizuje energie, u kyvadla v konstantním gravitačním poli je to součet kinetické a potenciální energie.

Poznámka 3. Pohyb bodu s hmotností m , na nějž působí vnější síla $\mathbf{F}$ v přítomnosti vazeb $g_1(\mathbf{r}), \dots, g_m(\mathbf{r})$, je dán rovnicemi (Lagrangeovy rovnice 1. druhu)

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t) + \lambda_1 \tilde{N} g_1(\mathbf{r}) + \dots + \lambda_m \tilde{N} g_m(\mathbf{r}).$$

V nich $\tilde{N}$ je operátor nabla (v trojrozměrném euklidovském prostoru 0xyz je $\tilde{N} = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$, kde $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ jsou jednotkové vektory ve směru os 0x, 0y, 0z).

Velkým Lagrangeovým příspěvkem k teoretické mechanice bylo zavedení soustavného používání obecných souřadnic místo kartézských.

Důkladnější výklad o tzv. *Lagrangeových rovnicích 1. druhu* lze najít v učebnicích mechaniky, např. [17-19].

S Lagrangeovým jménem je spojen také *princip virtuálních prací* používaný hlavně při hledání podmínek statické rovnováhy [17-19].

► Variační počet

Objevitelem variačního počtu byl L. Euler [5]. Lagrange však nahradil Eulerův geometrický přístup ryze analytickým procesem a ze zdoluhavého postupu vytvořil elegantní metodu. Ta je nastíněna v [5,11] a důkladněji vyložena v [20].

Lagrangeovo základní lemma variačního počtu [11,20].

Předpokládejme, že f a g jsou reálné spojité funkce na intervalu $[x_0, x_1]$, g je spojitě diferencovatelná a $g(x_0) = g(x_1) = 0$. Je-li $\int_{x_0}^{x_1} f g \, dx = 0$ pro každou takovou funkci g , je $f(x) = 0$ pro každé $x \in [x_0, x_1]$.

Odvození základní rovnice

Hledejme funkci y , která stacionarizuje $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x)) \, dx$, přičemž nabývá

v krajních bodech intervalu $[x_0, x_1]$ daných hodnot, $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ a funkce f má derivace dostatečně vysokého řádu. Abychom prozkoumali vliv změny y na hodnotu $J[y]$, přidáme k funkci y malý přírůstek $\delta y(x) = tu(x)$, tj. v bodě x bude $y(x) + tu(x)$ místo $y(x)$, kde t je reálné číslo a u je funkce diferencovatelná na intervalu $[x_0, x_1]$ a splňující okrajové podmínky $u(x_0) = 0, u(x_1) = 0$. Definujme funkci F proměnné t takto:

$$F(t) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x) + tu(x), y'(x) + tu'(x)) \, dx.$$

Reálná proměnná t hraje v integrálu na pravé straně roli parametru. Pro $t = 0$, tj. ve stacionárním bodě F , je $F'(0) = 0$. Při dostatečné hladkosti funkce f lze F derivovat

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dt} f(x, y(x) + tu(x), y'(x) + tu'(x)) \, dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial(y+tu)} f(x, y(x) + tu(x), y'(x) + tu'(x)) u(x) + \frac{\partial}{\partial(y'+tu')} f(x, y(x) + tu(x), y'(x) + tu'(x)) u'(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Integrál z druhého sčítance integrandu upravíme integrací per partes

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial(y'+tu')} f(x, y(x) + tu(x), y'(x) + tu'(x)) u'(x) \, dx \\ &= \frac{\partial}{\partial(y'+tu')} f(x, y(x) + tu(x), y'(x) + tu'(x)) u(x) \Big|_{x_0}^{x_1} \\ &\quad - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial(y'+tu')} f(x, y(x) + tu(x), y'(x) + tu'(x)) u(x) \, dx. \end{aligned}$$

V důsledku okrajových podmínek $u(x_0) = 0, u(x_1) = 0$ se první člen anuluje, takže

$$F'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial y} f(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} f(x, y(x), y'(x)) \right] u(x) \, dx = 0.$$

Podle základního lemmatu musí být hranatá závorka rovna 0, tj. platí

Eulerova-Lagrangeova rovnice:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} f(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Příklad. Hledejme nejkratší spojnici dvou bodů na válcové ploše $x^2 + y^2 = a^2$, tj. nejkratší křivku

$$x(\phi) = a \cos \phi, \quad y(\phi) = a \sin \phi, \quad z(\phi)$$

na intervalu $[\phi_0, \phi_1]$. Křivka je dána v parametrickém tvaru a její délka je

$$L[z] = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} d\phi = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{(-a \sin \phi)^2 + (a \cos \phi)^2 + (z')^2} d\phi = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{a^2 + (z')^2} d\phi.$$

Příslušná Eulerova-Lagrangeova rovnice zní

$$\frac{\partial}{\partial z} \sqrt{a^2 + (z')^2} - \frac{d}{d\phi} \frac{\partial}{\partial z'} \sqrt{a^2 + (z')^2} = 0 - \frac{d}{d\phi} \frac{z'}{\sqrt{a^2 + (z')^2}} = 0.$$

To znamená, že

$$\frac{z'}{\sqrt{a^2 + (z')^2}} = \frac{z'/a}{\sqrt{1 + (z'/a)^2}} = C = \text{const}$$

Položme-li $z'(\phi)/a = \tan \alpha(\phi)$, dostaneme $\frac{\tan \alpha(\phi)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha(\phi)}} = \sin \alpha(\phi) = C$, tedy $\alpha(\phi) = \text{const}$. Pak ovšem

$z'(\phi) = a \tan \alpha(\phi) = A (= \text{const})$ a

$$z(\phi) = A(\phi - \phi_0) + z(\phi_0).$$

Konstanta A je dána okrajovými body pro úhly ϕ_0, ϕ_1 : $A = (z(\phi_1) - z(\phi_0))/(\phi_1 - \phi_0)$.

Hledaná křivka je křivka s konstantním stoupáním na válcové ploše, tedy šroubovice.

•

Variační úlohy se dají řešit u funkcionálů závislých na vyšších derivacích hledané funkce, na funkcích s více nezávislými proměnnými, na více hledaných funkcích a při různých typech vedlejších podmínek [11,20]. Velmi důležité jsou isoperimetrické problémy (řecky $\text{ισοζ} = \text{stejný}$, $\text{περιμετρον} = \text{obvod}$). Nejstarší úlohou tohoto typu je úloha najít rovinnou křivku, která při zadané délce uzavírá maximální plochu (tzv. Didónina úloha [11]).

Zobecněný rovinný isoperimetrický problém

$$\left(\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x)) dx \mid \int_{x_0}^{x_1} g(x, y(x), y'(x)) dx = L = \text{const} \right) \rightarrow \text{extrém}$$

se řeší metodou Lagrangeova multiplikátoru $\lambda (= \text{const})$. Najde se extrém pomocného

$$\text{funkcionálu } \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \lambda) dx = \int_{x_0}^{x_1} [f(x, y(x), y'(x)) + \lambda g(x, y(x), y'(x))] dx.$$

$$\text{Příklad. Pro Didóninu úlohu, stručně } \left(\int_{x_0}^{x_1} y(x) dx \mid \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx - L = 0 \right) \rightarrow \max$$

s pomocnou funkcí $F(x, y, y') = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$ vypadá příslušná Eulerova-Lagrangeova rovnice takto:

$$\frac{\partial}{\partial y} F - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} F = 1 - \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 1 - \lambda \frac{d}{dx} \sin \theta(x) = 1 - \lambda \kappa(x) = 0. \text{ Zde } \kappa(x) \text{ je křivost [11],}$$

tj. $\kappa(x) = 1/\lambda = \text{const}$. Hledanou křivkou je tedy kružnice s poloměrem λ . Podrobněji viz [11].

► Diferenciální rovnice

Lagrangeova metoda *variace konstant*

V každém kurzu lineárních diferenciálních rovnic se zmiňuje metoda variace konstant [11,21,22]. Pro ilustraci uvedeme nejjednodušší příklad.

Příklad. Hledíme řešení $y(t)$ lineární diferenciální rovnice $y' + ay = b$, kde a, b jsou reálné konstanty.

Příslušná homogenní rovnice $y' + ay = 0$ se řeší snadno např. separací proměnných: $\frac{dy}{y} = -a dt$, po

integraci $\ln |y| = -a t + c_1$, tj. $y = C e^{-at}$, kde $C = e^{c_1}$ je neznámá konstanta. Najdeme ji tak, že podle Lagrange považujeme C za funkci t . Pak derivování $y(t) = C(t) e^{-at}$ podle t dá $y'(t) = C'(t) e^{-at} - aC(t) e^{-at}$ a po dosazení do původní rovnice $y' + ay = b$ dostaneme $C'(t) e^{-at} - aC(t) e^{-at} + aC(t) e^{-at} = b$. Tedy

$C'(t) e^{-at} = b$, čili $C'(t) = b e^{at}$ a po integraci $C(t) = C(t_0) + (b/a) [e^{at} - e^{at_0}]$.

Takže obecné řešení rovnice $y' + ay = b$ je

$$y(t) = C(t) e^{-at} = C(t_0) e^{-at} + (b/a) [e^{at} - e^{at_0}] e^{-at} = C(t_0) e^{-at} + \frac{b}{a} [1 - e^{-a(t-t_0)}].$$

Lagrangeova diferenciální rovnice

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right) y + B\left(\frac{dy}{dx}\right) x = C\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

je lineární v proměnných x a y , a A, B, C jsou diferencovatelné funkce proměnné $\frac{dy}{dx}$.

Položme $p = \frac{dy}{dx}$ a za předpokladu $A(p) \neq 0$ převedeme rovnici na tvar

$$y = a(p) x + b(p). \quad (*)$$

Derivováním podle x dostaneme

$$p = a(p) + [a'(p) x + b'(p)] \frac{dp}{dx}.$$

Považujeme-li p za nezávisle proměnnou a x za funkci p , můžeme tuto rovnici psát jako

$$[a'(p) x + b'(p)] = (p - a(p)) \frac{dx}{dp},$$

tj.

$$\frac{dx}{dp} - \frac{a'(p)}{p-a(p)} x = \frac{b'(p)}{p-a(p)}.$$

Tím jsme dostali lineární diferenciální rovnici pro $x(p)$, jejíž řešení nedělá problémy a lze je psát jako

$$x(p) = D c(p) + e(p),$$

kde D je konstanta, c a e jsou funkce získané integrací. Dosazení do rovnice (*) dává

$$y(p) = a(p) [D c(p) + e(p)] + b(p).$$

Příklad. Řešme rovnici $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 y + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 x = \left(\frac{dy}{dx}\right)^4$.

Po zavedení $p = \frac{dy}{dx}$ ji lze přepsat do tvaru $p^2 y + 2p^3 x = p^4$, tj. pro $p \neq 0$ je $y + 2px = p^2$, $a(p) = -2p$, $b(p) = p^2$. Takže $a'(p) = -2$, $b'(p) = 2p$ a pro x dostáváme lineární diferenciální rovnici

$$\frac{dx}{dp} - \frac{-2}{p-(-2)} x = \frac{2p}{p+2} \quad (**)$$

Obecné řešení najdeme *Lagrangeovou metodou variace konstant*. Řešením homogenní rovnice

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p+2} x = 0$$

je $x = \frac{E}{(p+2)^2}$. E budeme považovat za funkci p , takže derivování a dosazení do rovnice (**) dá

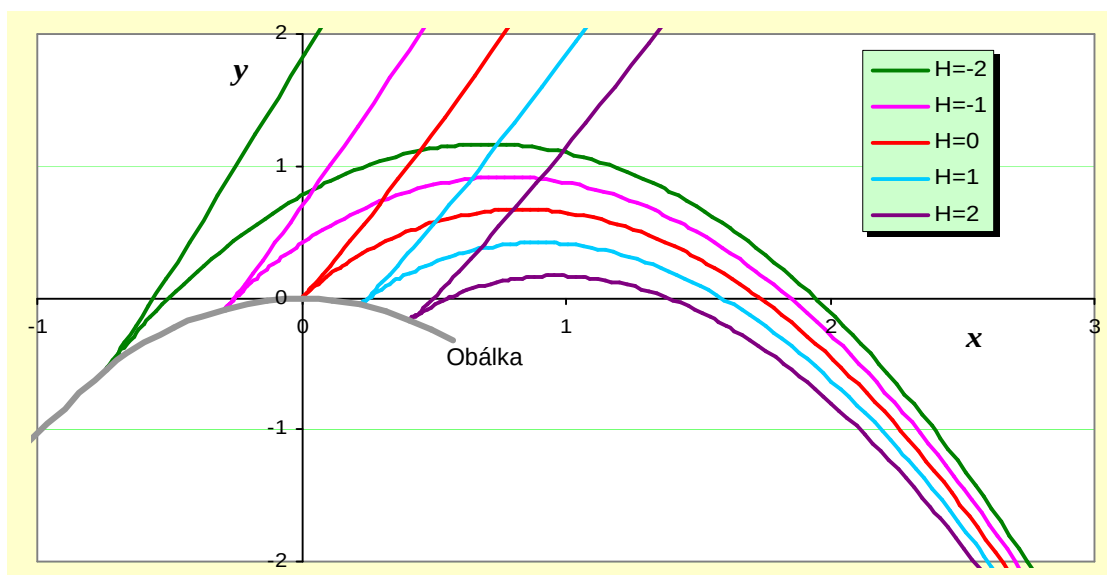
$-2E(p+2)^{-3} + E'(p+2)^{-2} + 2(p+2)^{-1}(p+2)^{-2} = 2p(p+2)^{-1}$, tj. $E'(p+2)^{-2} = 2p(p+2)^{-1}$, tj. $E' = 2p(p+2)$ a $E = 2p^3/3 + 2p^2 + H$, kde $H = \text{const}$. Celkem tedy dostáváme parametrické vyjádření proměnných x a y :

$$x(p) = \frac{2p^3 + 6p^2 + 3H}{3(p+2)^2}, \quad y(p) = p[-2x(p) + p].$$

Zvolme $p = 1$, $x(1) = 0$, $y(1) = 1$. Z rovnosti $x(1) = 0$ plyne $H = -\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$, takže

$$x(p) = \frac{2p^3 + 6p^2 - 8}{3(p+2)^2}, \quad y(p) = [p - 2x(p)] p.$$

Křivky $(x(p), y(p))$ jsou znázorněny na obr. 5.



Obr. 5 – Řešení rovnice $(\frac{dy}{dx})^2 y + 2(\frac{dy}{dx})^3 x = (\frac{dy}{dx})^4$ v parametrickém tvaru pro různé konstanty H .
Nelinearita rovnice způsobuje nejednoznačnost řešení.

Parciální diferenciální rovnice

Lagrange se v sérii prací napsaných v rozmezí téměř 15 let kolem roku 1780 věnoval parciálním diferenciálním rovnicím. Zahнул dosud odděleně rozebírané speciální případy (kmity struny, potenciál) do ucelené matematické disciplíny. U parciálních rovnic 1. řádu je např. známa Lagrangeova-Charpitova metoda hledání úplného integrálu [21].

Unikla mu však obecnost Bernoulliho řešení vlnové rovnice separací proměnných a nepostřehl význam později navržené Fourierovy reprezentace funkcí trigonometrickou řadou, která je zvláště vhodná pro řešení okrajových úloh [23].



MECHANIKA

Fyzikální děje a obecně interakce hmotných částic probíhají v prostoru. Až do začátku 20. století se fyzikální prostor axiomaticky ztotožňoval s třírozměrným euklidovským prostorem $\mathbb{R}^3$. Ale matematici o této nezdůvodněné totožnosti měli dávno pochybnosti a už v první polovině 19. století vytvořili neeuklidovské geometrie [24]. Pak ovšem vzniká otázka: Jakou má fyzikální prostor vlastně geometrii? Einsteinova speciální teorie relativity (1905) poprvé jasně ukázala provázanost fyzikálních veličin a geometrie.

Pohyb hmotného bodu

Základem klasické mechaniky v prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou Newtonovy zákony čili axiomy pohybu hmoty. V teoretické nebo analytické mechanice má nejfrekvencovanější aplikace 2. pohybový zákon. Newton ho našťastí formuloval v obecném tvaru [18]:

změna pohybu – dnes bychom řekli hybnosti – **je úměrná vtištěné síle**.

Síla i rychlost jsou v obvyklém pohledu vektory v běžně předpokládaném prostoru $\mathbb{R}^3$. Matematicky

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \quad (\text{N2})$$

kde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ je *hybnost* a $\mathbf{F}$ vtištěná (působící) síla.

Tato formulace 2. pohybového zákona zahrnuje i tělesa s *proměnnou hmotností*, což jsou pro malé rychlosti (ve srovnání s rychlostí světla) zejména rakety. Z 2. pohybového zákona a rovnosti akce a reakce lze jednoduše odvodit *Ciolkovského rovnici* pro rychlost rakety v dosažené spotřebou paliva [24, 25],

$$\mathbf{v} = v_p \ln \frac{m_0}{m_0 - m_p}.$$

V ní m_0 je počáteční celková hmotnost rakety (s palivem) v okamžiku startu, m_p je hmotnost paliva a v_p je konstantní rychlost proudu odvrhované hmoty (rychlost plynu hnaného přetlakem tryskou).

V mechanice se obvykle předpokládá, že tělesa nebo hmotné body svou hmotnost nemění. Pak

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = m \mathbf{a} = \mathbf{F},$$

kde $\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}$ je vektor zrychlení. Poslední rovnost,

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F},$$

je nejčastěji uváděný tvar 2. pohybového zákona.

Integrací (N2) v časovém intervalu $(0, t)$ dostáváme ihned

$$\int_0^t \left(\frac{d}{dt} \mathbf{p} \right) dt = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(0) = \int_0^t \mathbf{F} dt.$$

Integrálu na pravé straně se říká *impuls síly*. Slovy: změna hybnosti je rovna impulsu síly. Pro konstantní sílu $\mathbf{F}$ dostáváme rovnost

$$\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(0) = \mathbf{F} t.$$

Ta pro konstantní hmotnost určuje změnu rychlosti působením síly $\mathbf{F}$ po dobu t ,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{F} \frac{t}{m}.$$

Jednoduchým příkladem pohybu je tzv. šikmý vrh hmotného bodu s hmotností m nepřilíš velkou rychlostí ve *vakuu* a homogenním gravitačním poli s konstantním zrychlením $\mathbf{g}$. Na hmotný bod působí jen síla $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Počátek referenční soustavy umístíme do bodu, v němž v čase $t = 0$ začíná pohyb, $\mathbf{x}(0) = 0$. Počáteční rychlost $\mathbf{v}_0$ a vertikální směr zrychlení $\mathbf{g}$ určují rovinu pohybu Oxy . Úhel mezi počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$ a osou Ox označíme α . Rychlost v čase $t > 0$ je tedy

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + m\mathbf{g} t / m = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g} t$$

$$\text{a dráha } \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2.$$

Ve složkách jsou počáteční podmínky a zrychlení

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix},$$

rychlost a dráha v čase $t > 0$

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha - gt \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha - gt \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} v_0 t \cos \alpha \\ v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}.$$

•

Balistický pohyb. V podmínkách za zemským povrchem působí proti pohybu vždy nějaký odpor $\mathbf{R}$. Změnu pohybu hmotného bodu působí tedy síla $\mathbf{F}$ zmenšená o odpor $\mathbf{R}$. Tím se pohybová rovnice změní na

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F} - \mathbf{R}.$$

Proti pohybu projektilu vystřeleného pod úhlem elevace α počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$ působí odpor vzduchu, neboť projektil musí “odmrštit” částice, které mu stojí v cestě. Velikost odporu vzduchu je složitou funkcí rychlosti, hustoty a teploty vzduchu [27]. Pro jednoduchost pokles teploty s výškou zanedbáme a předpokládáme, že platí Newtonův zákon [28]

$$R(v, y) \approx CA \rho(y) v^2,$$

kde C je parametr vázaný na plochu čelního průmětu A projektilu, ρ je hustota vzduchu závislá na nadmořské výšce y . Podle [27] je

$$\rho(y) \approx \rho_0 \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{p_0}{p_0} g y\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

kde $\rho_0 = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$, $p_0 = 100 \text{ kPa}$, $n = 1.2$, $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ je gravitační zrychlení na zemském povrchu. Pro čelní průmět ve tvaru kruhu o průměru D po dosažení dostaneme

$$\rho(y) \approx C\pi(D/2)^2 (1 - 1.96 \times 10^{-5} y)^5.$$

Odpor vzduchu působí ve směru $-\mathbf{v}$, tj. $\mathbf{R}(\mathbf{v}) = -R(v) \mathbf{v}/v$, $v = |\mathbf{v}|$. Pohybová rovnice tedy zní

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} - \mathbf{R} = m\mathbf{g} - R(v, y) \mathbf{v}/v.$$

Při zadaných počátečních podmínkách $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ zbývá zvolit m a C . Pak lze např. při různých počátečních úhlech $\alpha = \arctan \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ najít dráhu letu, maximální výšku letu a dostřel, tj. souřadnici $\mathbf{x}(t)$ pro čas $t > 0$, při němž $y(t) = 0$. K tomu je třeba řešit nelineární vektorovou diferenciální rovnici

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = \mathbf{g} - \frac{1}{m} R(|\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)|, y) \times \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) / |\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)|, \quad \text{tj. soustavu}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R(v, y)}{m} \frac{v_x}{v} \\ -g - \frac{R(v, y)}{m} \frac{v_y}{v} \end{pmatrix},$$

s počátečními podmínkami $x(0) = y(0) = 0$, $\frac{d}{dt} x(0) = v_x(0) = v_0 \cos \alpha$, $\frac{d}{dt} y(0) = v_y(0) = v_0 \sin \alpha$,

kde $v = |\mathbf{v}| = |\frac{d}{dt} \mathbf{x}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Pro numerické řešení se soustava převede na systém diferenciálních rovnic 1. řádu s počáteční podmínkou

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{R(v, x_3)}{m} \frac{x_2}{v} \\ x_4 \\ -g - \frac{R(v, x_3)}{m} \frac{x_4}{v} \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Zvolme $m = 40$ kg a počáteční rychlost $|\mathbf{v}_0| = v_0 = 800$ m/s, $D = 0.122$ m. Parametr C závisí na tom, jak je projektil aerodynamický. Podle výsledků výpočtů uvedených v [18], s. 150, vychází $0.26 < C < 0.3$. Pak

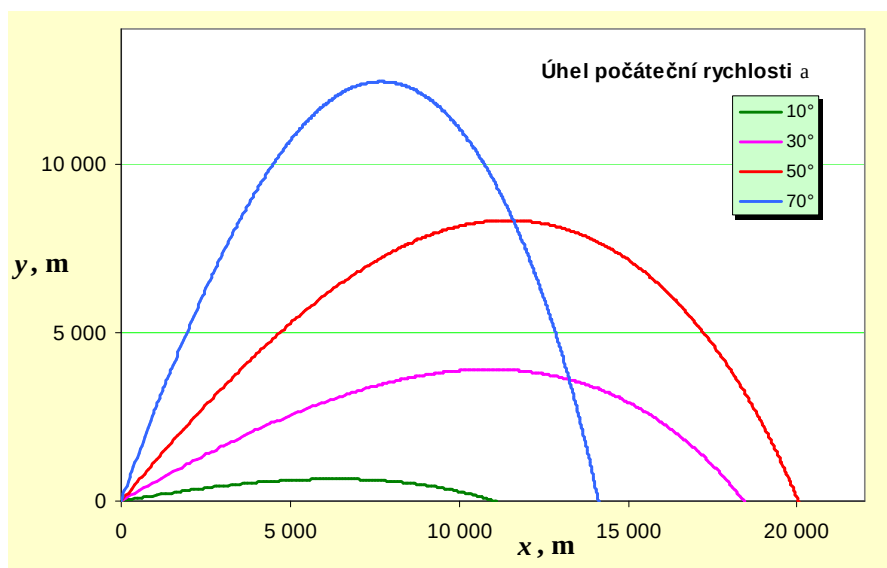
$$R(v, y) = C \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 (1 - 1.96 \times 10^{-5} y)^5 v^2.$$

K řešení systému rovnic $\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ jsem použil Fehlbergovu metodu [12] s časovým krokem $h = 0.1$ s (obr. 6). Také s kroky $h = 0.2$ s a $h = 0.5$ s vyšly trajektorie hodně blízké a graficky nerozlišitelné od řešení pro $h = 0.1$ s.

Přesnost řešení lze demonstrovat na dálce $x_m(h)$ dopadu projektilu. Pro úhel $\alpha_0 = 45.7^\circ$ vyšlo:

$h, \text{ s}$	0.1	0.05	0.025	0.0125
$x_m, \text{ m}$	20 201.75	20 201.23	20 201.02	20 200.90

Lineární extrapolace pro $h \rightarrow 0$ dává $x_m(0) = 2x_m(h) - x_m(2h) = 20\,200.8$ m.



Obr. 6 – Balistické křivky při různých úhlech počáteční rychlosti $v_0 = 800$ m/s.

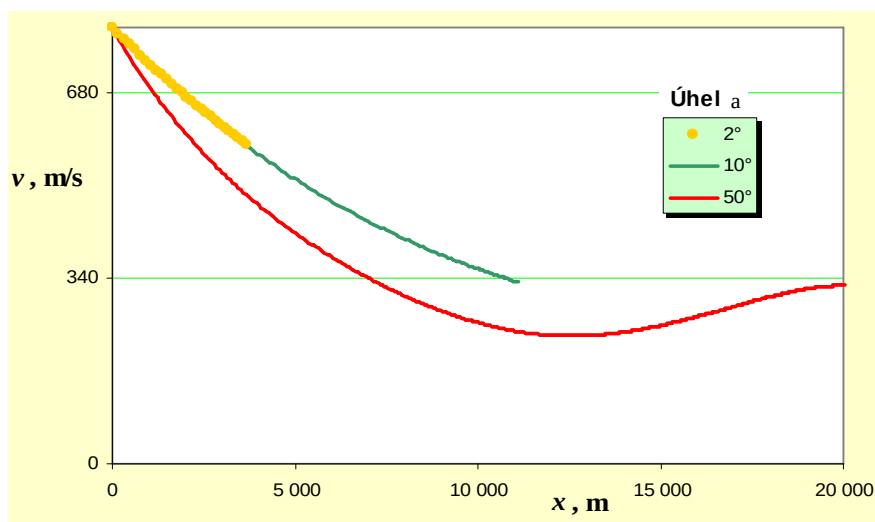
Doba letu projektilu při $\alpha_0 = 45.7^\circ$ je $t_m = 76.8$ s. Při střelbě podél poledníku (směr sever–jih) na místě se zeměpisnou šířkou φ působí na projektil Coriolisovo zrychlení $a_c = 2 |\mathbf{w} \times \mathbf{v}(t)| = 2\omega v_x(t) \sin \varphi$, kde ω je úhlová rychlost rotace Země a φ je zeměpisná šířka (u nás $\varphi \approx 50^\circ$). Horní odhad boční výchylky (na severní polokouli k západu, na jižní východu) způsobené zrychlením a_c v místě dopadu je

$$D_0 = 2 \frac{\pi}{12 \times 3600} \sin 50^\circ \frac{t_m^2}{2} \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} \frac{dx_1}{dt} dt = \frac{\pi}{21600} 0.76604 \frac{t_m}{2} x_m \approx \frac{\pi}{21600} 0.76604 \times 38.4 \times 20201 \approx 86 \text{ m}.$$

Při střelbě s deklinací δ (úhlem sevřeným s poledníkem) je horní odhad odchylky $D(\delta) = D_0 \cos \delta$.

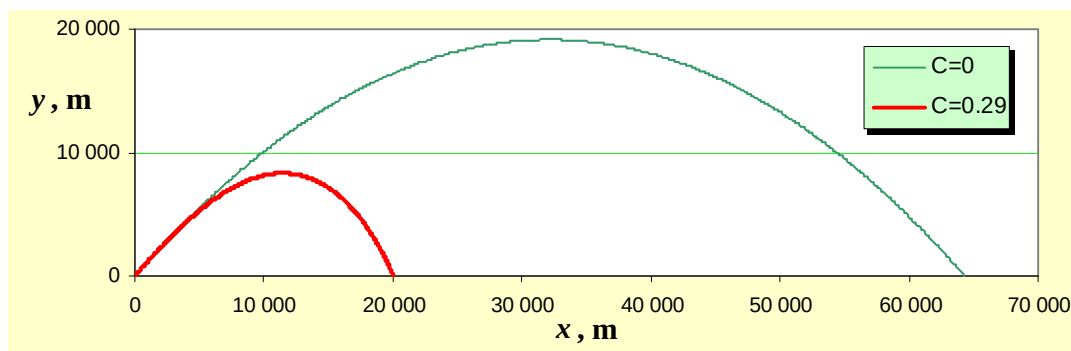
Skutečná trajektorie střely se kromě dříve uvedených faktorů mění se směrem a rychlostí větru. Např. můžeme vypočítat, že už při slabém protivětru 5 m/s se dolet projektilu při $\alpha_0 = 45.7^\circ$ zkrátí na 19 881 m, tj. o 320 m, a při stejném souhlasném větru se prodlouží o 324 m. Tyto faktory se berou v úvahu při nastavování směru výstřelu (počáteční rychlosti). Protože podmínky v atmosféře jsou stochastické, uplatňují se u moderních střel tryskové motory s regulačními prvky a systémy samonavádění.

Zajímavý je průběh rychlosti projektilu: odporem vzduchu se snižuje a při delších drahách letu klesá pod rychlost zvuku. Letící projektil přestane vydávat nadzvukový třesk a jeho akustický doprovod se podobá hluku tryskového letadla letícího podzvukovou rychlostí. Při přímé střelbě s malými úhly α projektil prolétne celou dráhu nadzvukovou rychlostí (obr. 7).



Obr. 7 – Rychlost projektilu při různých úhlech elevace α s počáteční rychlostí $v_0 = 800$ m/s.

Značný vliv odporu vzduchu názorně předvádí obr. 8 pro stejný projektil ($m = 40$ kg, $D = 0.122$ m) a počáteční rychlost $|\mathbf{v}_0| = v_0 = 800$ m/s.



Obr. 8 – Dráha s počáteční rychlostí 800 m/s a $\alpha = 50^\circ$ ve vakuu ($C = 0$) a ve vzduchu ($C = 0.29$).

•

Při $\alpha = 90^\circ = \pi/2$ jde o pohyb ve svislém směru po ose $0y$, tedy v jedné dimenzi. Ve vakuu je vertikální složka rychlosti

$$v_y(t) = \frac{d}{dt}y(t) = v(0) - gt$$

a vertikální souřadnice $y(t) = v(0)t - \frac{1}{2}gt^2$ při $t_m = \frac{v(0)}{g}$ nabývá maxima $y_m = \frac{v^2(0)}{2g}$.

Pro balistický pohyb stačí v příslušném programu zvolit $\alpha = 90^\circ$. Při stejné počáteční rychlosti $v(0) = 800$ m/s vyjde maximální výška $y_m = 14\,178$ m a rychlost dopadu je 369 m/s. Proti tomu je ve vakuu $y_m = 800^2/(2 \times 9.8) = 32\,653$ m a rychlost dopadu 800 m/s, tedy $v(0)$.

I v jedné dimenzi se ovšem vyskytují složitější případy. Nejobecnější případ pohybu na ose $0x$ má tvar $m \frac{d}{dt}v = m f(t, x, v)$, tj.

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = f(t, x(t), \frac{d}{dt}x(t)).$$

Takovou rovnici lze obecně řešit jen numericky [13]. Jako zajímavý příklad jsme v [25] uvedli kvalitativně odlišné chování Duffingova podivného atraktoru

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = f(x(t), \frac{d}{dt}x(t)) = -\frac{1}{5}[x^2(t) - a] \frac{d}{dt}x(t) + \frac{1}{4}\cos t$$

způsobené malou změnou parametru a (změna $a = 1$ na $a = 0.98$).

V klasické mechanice [18] se vyšetřují speciální případy funkce f .

- Rovnici $\frac{d^2}{dt^2}x(t) = f(t)$ s počátečními podmínkami $x(0) = x_0$, $\frac{d}{dt}x(0) = v_0$ lze řešit poměrně jednoduše,

$$\frac{d}{dt}x(t) = v_0 + F(t), \quad \text{kde } F(t) = \int_0^t f(u) du. \quad \text{Pak } x(t) = x_0 + \int_0^t F(u) du.$$

Integrací per partes dostaneme

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(u) du = x_0 + \int_0^t \left(\int_0^u f(v) dv \right) du = x_0 + \int_0^t (t-u) f(u) du$$

- Rovnice $\frac{d^2}{dt^2}x(t) = f(x(t))$ s počátečními podmínkami $x(0) = x_0$, $\frac{d}{dt}x(0) = v_0$. Položme $\frac{d}{dt}x = v$. Pak

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}v = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} \right). \quad \text{Zvolíme-li } x \text{ za nezávisle proměnnou, lze psát}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} \right) = f(x), \quad \text{takže } \frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + \int_{x_0}^x f(u) du, \quad \text{resp.}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \int_{x_0}^x f(u) du$$

Aby rychlost v byla reálná a nenulová, musí pravá strana být kladná. Pak lze obě strany odmocnit

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{x_0}^x f(u) du}.$$

Separací proměnných a integrací dostaneme

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dz}{\sqrt{v_0^2 + 2 \int_{x_0}^z f(u) du}}.$$

Z předpokladu $v_0^2 + 2 \int_{x_0}^x f(u) du > 0$ plynou omezení pro funkci f . Podrobnější diskuse je v [18].

•

Zde jen pro ilustraci uvažujeme ten nejjednodušší případ: volný pád z výšky x_0 s počáteční rychlostí $v_0 = 0$ v gravitačním poli s konstantním zrychlením $-g$.

V prvním případě $f(t) = -g$ dostaneme

$$x = x_0 + \int_0^t (t-u)(-g) du = x_0 - g t \int_0^t du + g \int_0^t u du = x_0 - g(t^2 - \frac{t^2}{2}) = x_0 - g \frac{t^2}{2},$$

tj. klasický výraz pro dráhu $x_0 - x = g \frac{t^2}{2}$.

V druhém případě $f(x) = -g$ dostaneme ($x_0 > 0, v_0 = 0$)

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{x_0}^x \frac{dz}{\sqrt{v_0^2 + 2 \int_{x_0}^z f(u) du}} = \int_{x_0}^x \frac{dz}{\sqrt{2 \int_{x_0}^z (-g) du}} = \int_{x_0}^x \frac{dz}{\sqrt{2g \int_z^{x_0} du}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^x \frac{dz}{\sqrt{x_0 - z}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} 2 \sqrt{x_0 - x}. \end{aligned}$$

To po zdvojnásobení dává opět $g(t - t_0)^2 = 2(x_0 - x)$.

•

Někdy je ovšem výhodné místo kartézských souřadnic použít jiných souřadnic. V mechanice se jim říká zobecněné souřadnice. Např. u kyvadla je zřejmé, že pohyb hmotného bodu lze zpravidla přiblížit pohybem ve svislé rovině po kružnici s pevným poloměrem rovným délce závěsu l . Počátek kartézské soustavy Oxy umístíme např. do bodu závěsu. Poloha hmotného bodu je pak určena jen úhlem ϕ mezi závěsem a svislicí,

$$x(\phi) = l \sin \phi,$$

$$y(\phi) = l \cos \phi.$$

Hmotný bod s hmotností m získá výchylkou do polohy dané úhlem ϕ_0 potenciální energii $E_{pot} = mg(1 - \cos \phi)$. Ta se po uvolnění bodu v čase $t = 0$ začne měnit v kinetickou energii

$$E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} m [(l \cos \phi)^2 + (-l \sin \phi)^2] \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2.$$

Přitom podle zákona o zachování energie $E_{pot} + E_{kin} = \text{const}$, tj. $\frac{d}{dt} (E_{pot} + E_{kin}) = 0$ a

$$mgl \sin \phi \frac{d\phi}{dt} + ml^2 \frac{d\phi}{dt} \frac{d^2\phi}{dt^2} = ml^2 \frac{d\phi}{dt} \left(\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \phi \right) = 0.$$

Úhlová rychlost $\frac{d\phi}{dt}$ se anuluje jen v bodech obratu (maximální výchylky, $\pm\phi_0$), jinde platí rovnice matematického kyvadla

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0.$$

Jejím řešením jsme se podrobněji zabývali už dříve v [5,24].

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Nyní bychom měli naše úvahy rozšířit na izolovanou soustavu n hmotných bodů, odvozovat pohybové zákony, uvést různé principy mechaniky atd. Tomu se však věnují obšírné učebnice mechaniky. Zde můžeme jen nastínit podstatu Lagrangeova přínosu. Podrobný popis vývoje Lagrangeova pojetí mechaniky je v [29].

Jak jsme už několikrát uvedli, pro mechanický pohyb jsou charakteristické změny kinetické energie, tedy součinu hmotnosti a čtverce rychlosti. U jednoho hmotného bodu je derivace kinetické energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$ podle složky rychlosti rovna odpovídající složce hybnosti,

$$\frac{\partial}{\partial v_i} E_{kin} = \frac{\partial}{\partial v_i} (\dots + \frac{1}{2} m v_i^2 + \dots) = m v_i.$$

Podle 2. pohybového zákona je časová změna hybnosti rovna působící síle, tedy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial v_i} E_{kin} \right) = \frac{d}{dt} (m v_i) = F_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Kinetická energie soustavy hmotných bodů je součtem kinetických energií jednotlivých bodů

$$E_{kin} = \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = \sum_{k=1}^n m_k (v_{k1}^2 + v_{k2}^2 + v_{k3}^2).$$

Definujeme-li $m_{3s-2} = m_{3s-1} = m_{3s}$ (tj. $m_1 = m_2 = m_3, m_4 = m_5 = m_6, \dots$) a $v_{(3s-1)+j} = v_k$ pro $s = 1, \dots, n$ můžeme kinetickou energii soustavy n bodů psát jako

$$E_{kin} = \sum_{k=1}^{3n} m_k v_k^2.$$

Systematickým a nejvýznamnějším prvkem Lagrangeova uvažování byl přechod od kartézských souřadnic x_k , $k = 1, \dots, 3n$, k obecným souřadnicím $q_1, \dots, q_s$. Číslo s udává počet zobecněných souřadnic nutných pro popis systému. Říká se mu počet stupňů volnosti. Souřadnice x_k se tak stávají funkcemi obecných souřadnic $q_1, \dots, q_s$ a času t ,

$$x_k(t) = x_k(q_1(t), \dots, q_s(t), t).$$

Složky rychlosti jsou derivace složené funkce $x_k(t)$

$$v_k = \frac{d}{dt} x_k(t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{d}{dt} q_i(t) + \frac{\partial x_k}{\partial t}.$$

Dosazením do $E_{kin} = \sum_{k=1}^{3n} m_k v_k^2$ dostaneme kinetickou energii jako funkci souřadnic q_k ,

zobecněných rychlostí $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$ a času t

$$E_{kin}(q_1, \dots, q_s, \frac{dq_1}{dt}, \dots, \frac{dq_s}{dt}, t).$$

Dalším dosazením do $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial v_i} E_{kin} \right) = F_i$ a úpravami [17–19] lze dospět k obecným

Lagrangeovým rovnicím 2. druhu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} E_{kin} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} E_{kin} = \sum_{j=1}^3 F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, s,$$

kde Q_i jsou zobecněné síly. V nich figurují různé druhy sil, nejčastěji to jsou potenciální a disipativní síly.

Příklad. U šikmého vrhu je $E_{kin} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, složky odporu vzduchu $R_x = R(v, y) \frac{\dot{x}}{v}$, $R_y = R(v, y) \frac{\dot{y}}{v}$, potenciální síla, gravitace, má složky $G_x = 0$, $G_y = -mg$. Z Lagrangeových rovnic 2. druhu dostaneme tedy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} E_{kin} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{x}) = m \ddot{x} = G_x + R_x = R(v, y) \frac{\dot{x}}{v},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}} E_{kin} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{y}) = m \ddot{y} = G_y + R_y = -mg + R(v, y) \frac{\dot{y}}{v}.$$

•

S Lagrangeovým jménem je spojen velmi efektivní způsob odvození pohybových rovnic založený na *minimalizaci* tzv. *akční funkce*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin} - E_{pot}) dt,$$

kde kinetická a potenciální energie jsou funkcemi času t , zobecněných souřadnic $q_k(t)$ a jejich derivací podle času, $\dot{q}_k(t)$. Integrandu

$$L = E_{kin} - E_{pot}$$

se říká **Lagrangeova funkce** (nebo *lagrangián* dříve také *kinetický potenciál*). Odvození pohybových rovnic minimalizací akční funkce konzervativního systému se nazývá *Hamiltonův princip*. Příslušným Eulerovým–Lagrangeovým rovnicím (vynásobeným (-1))

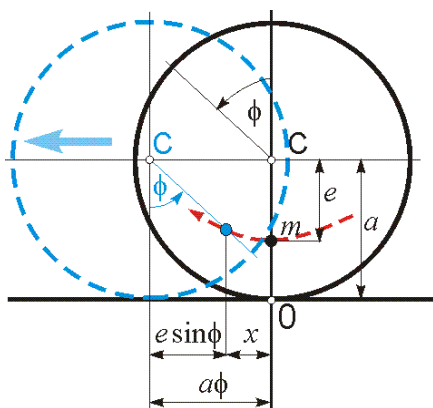
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (L(t, q_k(t), \dot{q}_k(t))) - \frac{\partial}{\partial q_k} L(t, q_k(t), \dot{q}_k(t)) = 0, \quad k = 1, \dots, s$$

se v mechanice říká **Lagrangeovy rovnice 2. druhu**.

U matematického kyvadla je $s = 1$. Aplikaci Hamiltonova principu u kyvadla jsme předvedli v [5,24]. Následující příklady ukazují trochu složitější *diskové kyvadlo*.

•

Příklad 1. V gravitačním poli se zrychlením g umístíme hmotný bod s hmotností m do vzdálenosti e od středu nehmotného disku (válce) o poloměru a , který se odvaluje po vodorovné přímce (obr. 9).



Obr. 9 – Dráha vnitřního bodu odvalujícího se kruhu. Poloměr kruhu je a , vzdálenost bodu od středu kružnice je e . Kruh se odvaluje doleva, úhel ϕ je kladný a souřadnice x záporná.

V okamžiku $t = 0$ je $\phi(0) = 0$, $x(0) = 0$, $y(0) = a - e$. Definujme $\varepsilon = e/a$. Pro $t > 0$ je

$$x(\phi(t)) = -a \phi(t) + e \sin \phi(t) = a (-\phi(t) + \varepsilon \sin \phi(t)),$$

$$y(\phi(t)) = a - e \cos \phi(t) = a (1 - \varepsilon \cos \phi(t))$$

Kinetická energie bodu s hmotností m je

$$E_{kin} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} a^2 [(-1 + \varepsilon \cos \phi)^2 + (\varepsilon \sin \phi)^2] \dot{\phi}^2 = \frac{m}{2} a^2 (1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2) \dot{\phi}^2$$

a potenciální energie vzhledem k ose $0x$

$$E_{pot} = mgy = mga (1 - \varepsilon \cos \phi(t)),$$

V rozdílu

$$E_{kin} - E_{pot} = \frac{m}{2} a^2 (\dot{\phi}^2) - mga (\dots)$$

můžeme součin ma^2 vytknout a protože tato konstanta chování akční funkce neovlivní, uvažovat jen

$$L = \frac{1}{2} (1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2) \dot{\phi}^2 - \frac{g}{a} (1 - \varepsilon \cos \phi).$$

Vypočteme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} L(t, \phi(t), \dot{\phi}(t)) = \frac{d}{dt} [(1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2) \dot{\phi}] = (1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2) \ddot{\phi} + 2\varepsilon \dot{\phi}^2 \sin \phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} L(t, \phi(t), \dot{\phi}(t)) = \varepsilon \dot{\phi}^2 \sin \phi - \frac{g}{a} \varepsilon \sin \phi.$$

Lagrangeova rovnice 2. druhu tedy zní

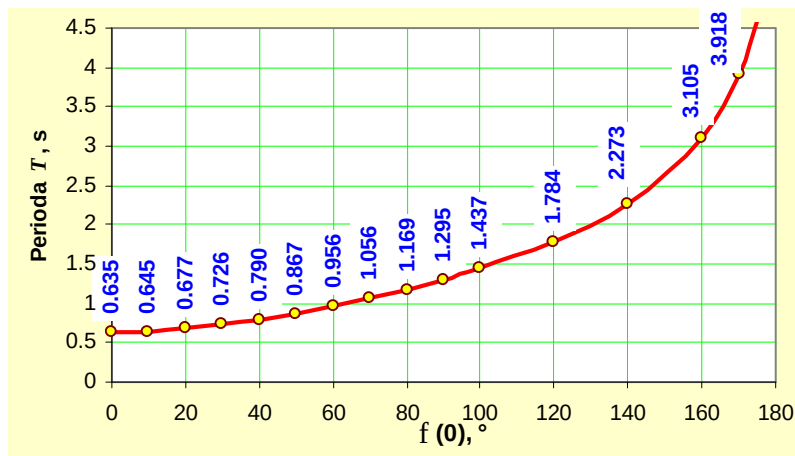
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} L - \frac{\partial}{\partial \phi} L &= (1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2) \ddot{\phi} + 2\varepsilon \dot{\phi}^2 \sin \phi - (\dot{\phi}^2 - \frac{g}{a}) \varepsilon \sin \phi \\ &= (1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2) \ddot{\phi} + (\dot{\phi}^2 + \frac{g}{a}) \varepsilon \sin \phi = 0. \end{aligned}$$

Tuto nelineární diferenciální rovnici 2. řádu přepíšeme do systému rovnic 1. řádu tak, že položíme

$$x_1 = \phi, \quad x_2 = \dot{\phi}:$$

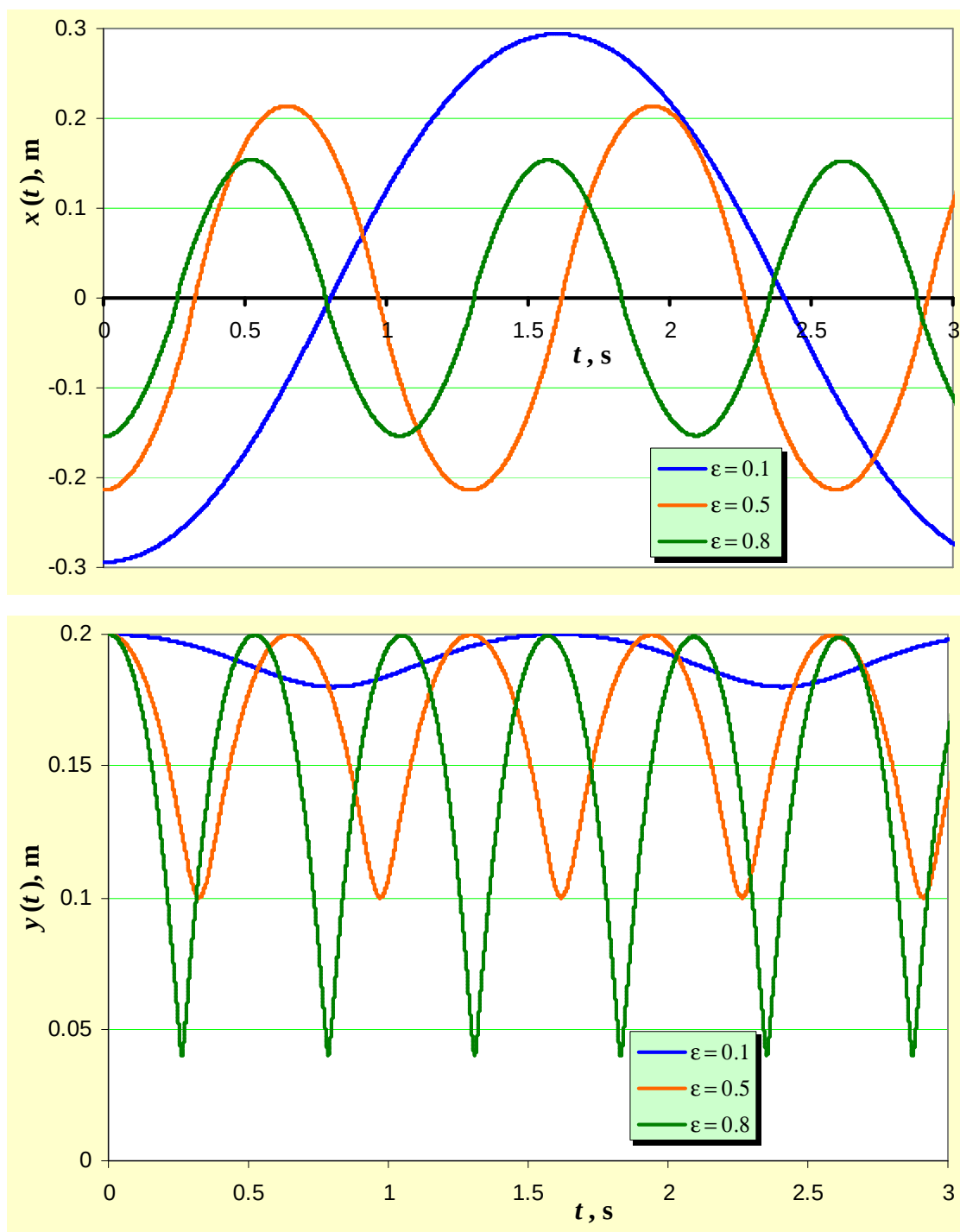
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{x_2^2 + g/a}{1 - 2\varepsilon \cos x_1 + \varepsilon^2} \varepsilon \sin x_1. \end{aligned}$$

Zvolme $x_2(0) = 0$. Nyní lze pro různé počáteční výchylky $x_1(0) = \phi(0)$ a $0 \leq \varepsilon \leq 1$ počítat řešení některou numerickou metodou [12]. Zvolil jsem opět Fehlbergovu metodu. Závislost periody kmitů na úhlové amplitudě pro $\varepsilon = 0.5$ je znázorněna na obr. 10.



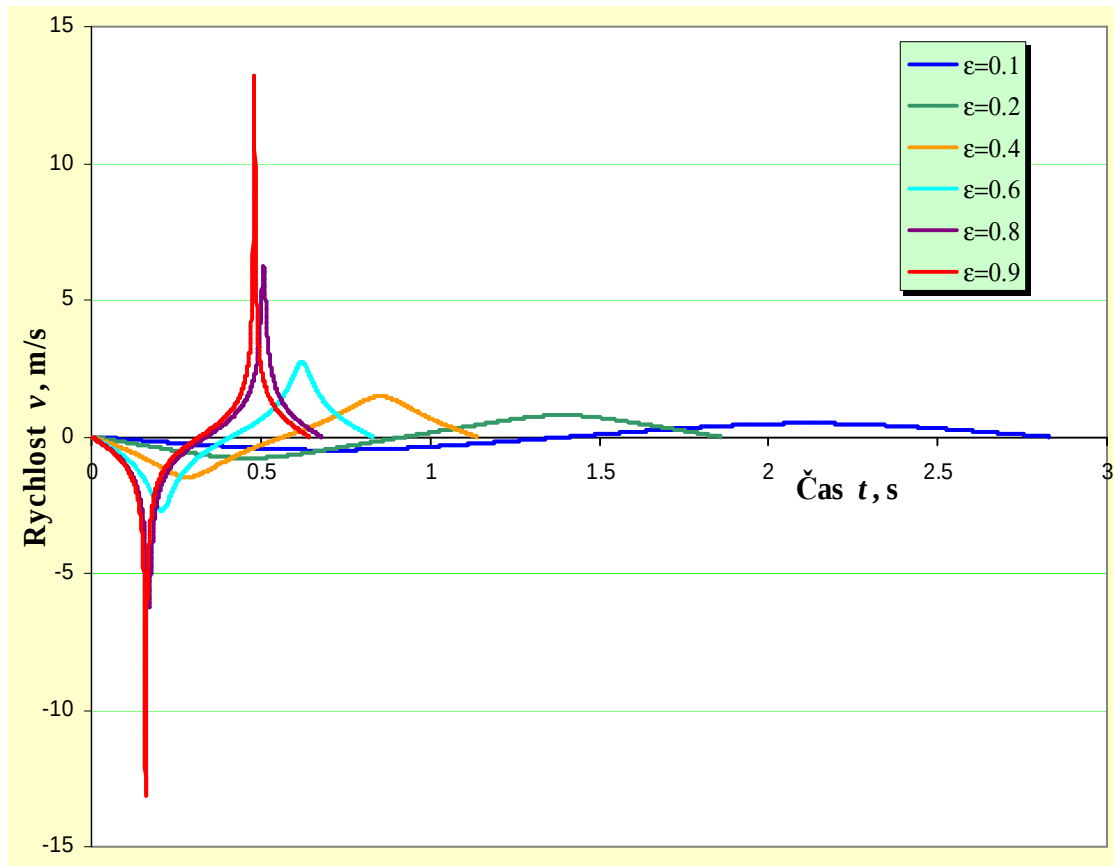
Obr. 10 – Závislost periody kmitů T na počáteční úhlové výchylce $\phi(0)$ pro parametr $\varepsilon = 0.5$.

Nejvyšší možná poloha bodu s hmotností m určená úhlem $\phi(0) = \pi = 180^\circ$ je labilní rovnovážná poloha ($\ddot{\phi}(0) = \dot{\phi}(0) = 0$) a odpovídající doba kyvu je $T = \infty$ (podobně jako u matematického kyvadla [24]). Jak ilustruje obr. 11, s rostoucím ε se nelinearita kmitů (nesinusový průběh souřadnice y s dvojnásobnou frekvencí) zvětšuje a doba kmitu se zkracuje.



Obr. 11 – Souřadnice $x(t)$ a $y(t)$ hmotného bodu při různých excentricitách ε a stejné počáteční amplitudě $\phi(0) = 90^\circ$. Průběh $x(t)$ je zhruba sinusový.

Nelinearita kmitů pro $\varepsilon > 0.2$ (odchylka od sinusového průběhu) se ještě zřetelněji projevuje na obvodové rychlosti $v = a\dot{\phi}$ (obr. 12)



Obr. 12 – Časový průběh obvodové rychlosti prvního kmitu vyvolaného stejnou úhlovou výchylkou $\phi(0) = 60^\circ$ při různé excentricitě $e = a\varepsilon$ hmotného bodu.

•

Příklad 2. Diskové kyvadlo z příkladu 1 (obr. 9) se dá fyzikálně realizovat jen přibližně při velmi malém poměru hmotnosti M dokonale vyváženého disku a rozměrově malého závaží s hmotností m . Z praxe jsou ale běžné případy, kdy $\frac{M}{m} > 1$, např. ráfek pneumatiky s nějakým závažím. Popis kmitů takového systému lze zase jednoduše odvodit pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu.

Kinetická energie disku o hmotnosti M se skládá z příspěvku translačního posunu jeho středu a rotačního pohybu disku. K ní se přičítá kinetická energie izolovaného hmotného bodu m , tedy

$$E_{kin} = \left(\frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{J}{2} \dot{\phi}^2 \right) + \frac{m}{2} a^2 (1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2) \dot{\phi}^2,$$

kde J je moment setrvačnosti disku vzhledem k ose symetrie, $J = \int_M r^2 dm$. Pro jednoduchost zvolme

disk ve tvaru homogenního válce s výškou h (kruhové desky s tloušťkou h) a hustotou $\rho = \frac{M}{\pi a^2 h}$

$$J = \int_0^a r^2 \rho h \left(\int_0^{2\pi} r d\phi \right) dr = 2\pi \rho h \int_0^a r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{a^4}{4} = (\rho \pi a^2 h) \frac{a^2}{2} = M \frac{a^2}{2}.$$

Tedy kinetická energie soustavy

$$E_{kin} = \left[\left(\frac{M}{2} + \frac{M}{4} \right) a^2 + \frac{m}{2} a^2 (1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2) \right] \dot{\phi}^2 = \left[\frac{3M}{4} + \frac{m}{2} (1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2) \right] a^2 \dot{\phi}^2.$$

Potenciální energie vzhledem k nulové hladině v úrovni osy rotace disku, $y = a$, je rovna jen příspěvku hmotnosti m

$$E_{pot} = mg(y - a) = mg[a(1 - \varepsilon \cos \phi) - a] = -mga \varepsilon \cos \phi(t).$$

Jako v příkladě 1 za Lagrangeovu funkci vezmeme

$$L(t, \phi(t), \dot{\phi}(t)) = \frac{1}{ma^2} (E_{kin} - E_{pot}) = \left[\frac{3M}{4m} + \frac{1}{2} (1 - 2\varepsilon \cos \phi(t) + \varepsilon^2) \right] \dot{\phi}^2(t) + \frac{g}{a} \varepsilon \cos \phi(t),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} L(t, \phi(t), \dot{\phi}(t)) = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{3M}{2m} + 1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2 \right) \dot{\phi} \right] = \left(\frac{3M}{2m} + 1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2 \right) \ddot{\phi} + 2\varepsilon \dot{\phi}^2 \sin \phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} L(t, \phi(t), \dot{\phi}(t)) = \varepsilon \dot{\phi}^2 \sin \phi - \frac{g}{a} \varepsilon \sin \phi.$$

Nyní můžeme sestavit Lagrangeovu rovnici 2. druhu:

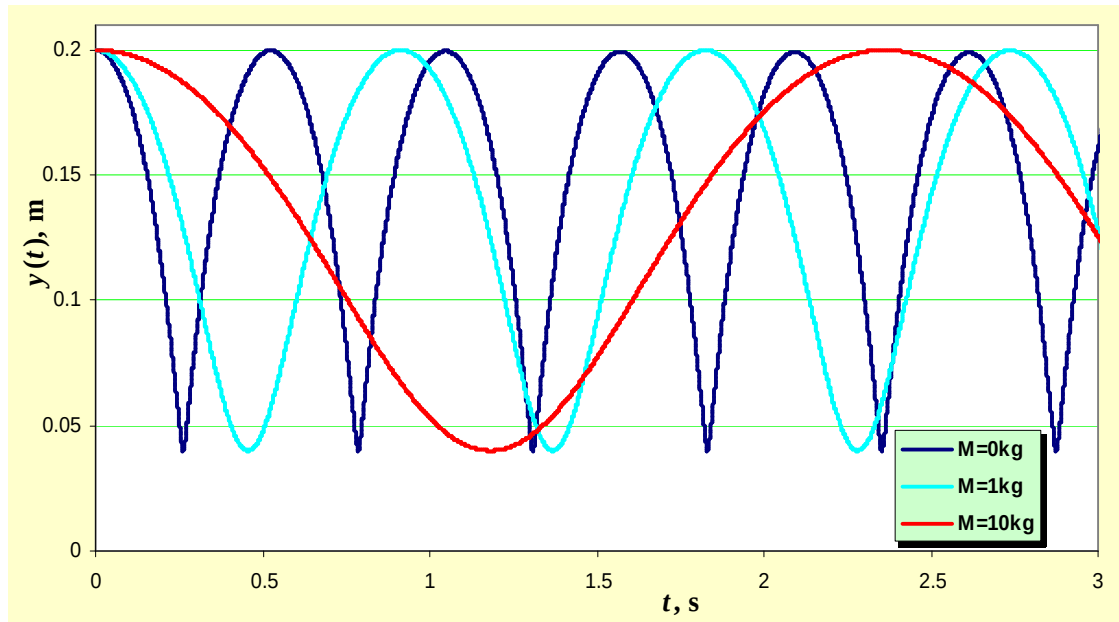
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} L - \frac{\partial}{\partial \phi} L &= \left(\frac{3M}{2m} + 1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2 \right) \ddot{\phi} + 2\varepsilon \dot{\phi}^2 \sin \phi - \left(\dot{\phi}^2 - \frac{g}{a} \right) \varepsilon \sin \phi \\ &= \left(\frac{3M}{2m} + 1 - 2\varepsilon \cos \phi + \varepsilon^2 \right) \ddot{\phi} + \left(\dot{\phi}^2 + \frac{g}{a} \right) \varepsilon \sin \phi = 0. \end{aligned}$$

Tuto pohybovou rovnici převedeme zase na systém 2 rovnic 1. řádu vhodný pro numerické řešení

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= - \frac{x_2^2 + g/a}{3M/(2m) + 1 - 2\varepsilon \cos x_1 + \varepsilon^2} \varepsilon \sin x_1. \end{aligned}$$

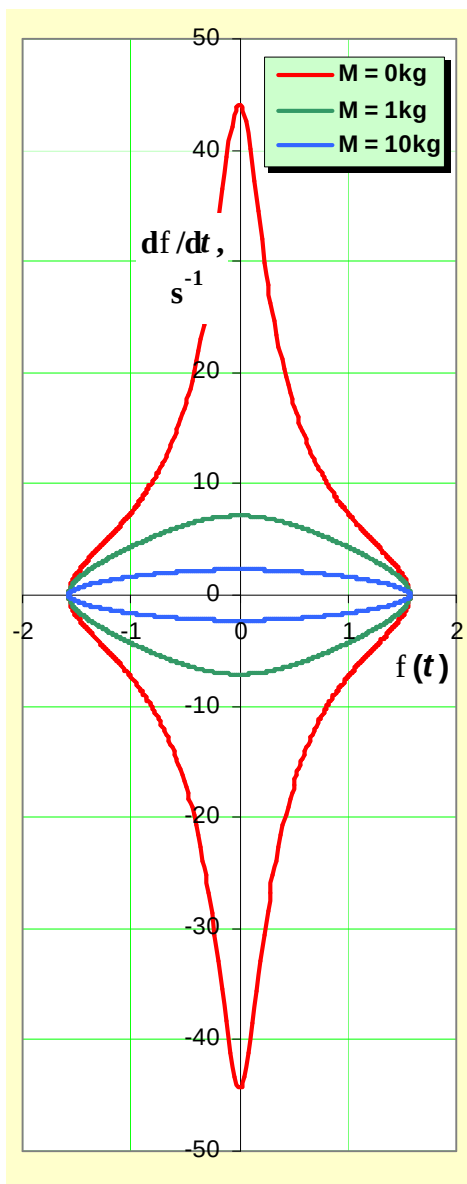
Lze očekávat, že hmotnost disku M a jeho moment setrvačnosti J bude kmity systému zpomalovat a “harmonizovat“. To na časovém průběhu vertikální souřadnice polohy izolované hmoty ukazuje obr. 13.

Snad ještě zřetelněji to ukazují fázové trajektorie, tj. křivky $(x_1(t), x_2(t)) = (\phi(t), \dot{\phi}(t))$ na obr. 14.

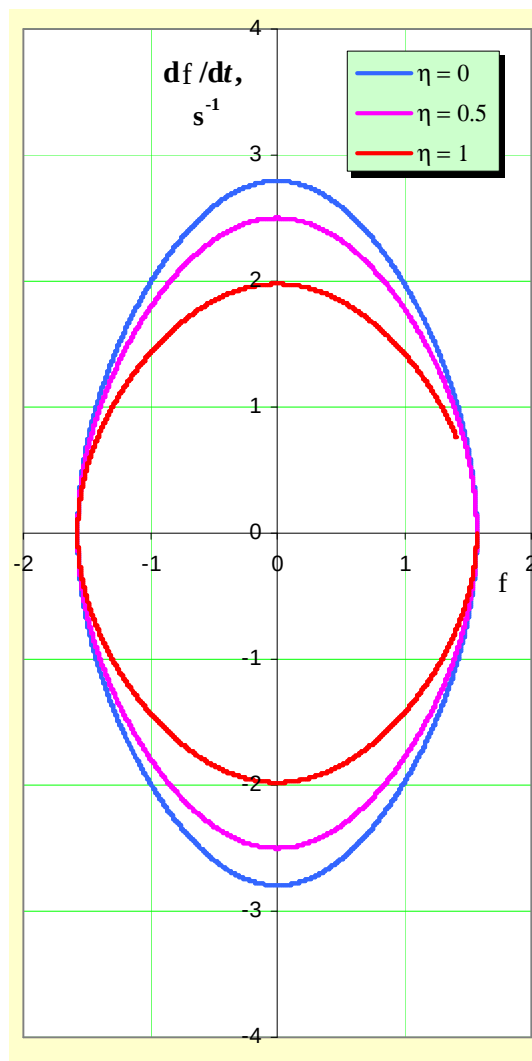


Obr. 13 – Časový průběh vertikální souřadnice polohy bodu s hmotností $m = 1\text{ kg}$ na ideálním válcovém disku o poloměru $a = 0.2\text{ m}$ pro různé hmotnosti M . Parametry pohybu jsou:

$$\varepsilon = 0.8, \phi(0) = 90^\circ, \dot{\phi}(0) = 0.$$



Obr. 14 – Fázové trajektorie pro disk s konstantní plošnou hustotou hmoty s celkovými hmotnostmi M . Parametry z obr. 13.



Obr. 15 – Fázové trajektorie pro disk s konstantní obvodovou distribucí hmoty na koaxiálních válcových plochách o poloměrech $r = \eta a$. $M = 10\text{kg}$, $m = 1\text{kg}$, $\phi(0) = 90^\circ$, $d\phi/dt(0) = 0\text{s}^{-1}$.

Obecněji bychom mohli uvažovat osově symetrickou distribuci hmoty disku M na kružnici o poloměru ηa , jako např. u ráčku pneumatiky. Odpovídající hustota a moment setrvačnosti disku by pak byly

$$\rho = \frac{M}{2\pi\eta ah}, \quad J = \int_{-\pi}^{\pi} (\eta a)^2 \rho a \eta h d\phi = \frac{M}{2\pi\eta ah} 2\pi\eta^3 a^3 h = Ma^2\eta^2.$$

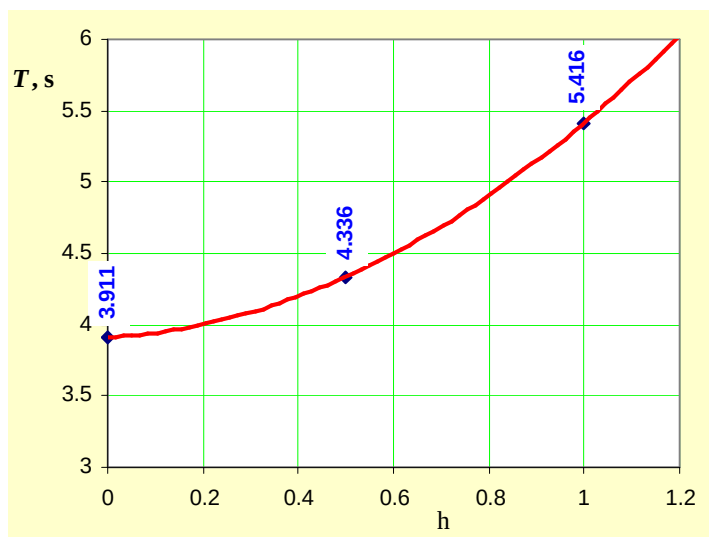
Odtud

$$E_{kin} = \left(\frac{M}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{J}{2} \dot{\phi}^2 \right) + \frac{m}{2} a^2 (1 - 2\epsilon \cos \phi + \epsilon^2) \dot{\phi}^2 = \left[(1 + \eta^2) \frac{M}{m} + (1 - 2\epsilon \cos \phi + \epsilon^2) \right] \frac{ma^2}{2} \dot{\phi}^2.$$

Potenciální energie se nemění, takže výše uvedeným postupem dostáváme pro numerické řešení soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{x_2^2 + g/a}{(1+\eta^2)M/m + 1 - 2\epsilon \cos x_1 + \epsilon^2} \epsilon \sin x_1.\end{aligned}$$

Fázové trajektorie pro různá η při stejných počátečních podmínkách jsou zakresleny na obr. 15. Na obr. 16 je graf závislosti periody kmitů T na η .



Obr. 16 – Délka periody kmitů T jako funkce poloměru kružnice $r = \eta a$, na níž je rovnoměrně rozložena hmotnost M .

Je zřejmé, jak se s rostoucím momentem setrvačnosti J – v uvažovaném případě J roste s η – perioda kmitů zvyšuje (může být také $\eta > 1$).

•

Uvedené příklady řešily pohyb s jedním stupněm volnosti. Dvojitě kyvadlo nebo systém dvou hmot na dvou pružinách jsou příklady systému se 2 stupni volnosti (druhý případ lze použít jako zjednodušený model pérování automobilu (www.koutny-math.com | *Geometry and Mechanics of Pneumatic Tires*, s. 100). Mnoho dalších příkladů lze najít v učebnicích mechaniky. Všechny ukazují účelnost Lagrangeovy funkce i to, že sestavení pohybových rovnic, tj. Lagrangeových rovnic 2. druhu a jejich řešení se obvykle stává v podstatě technickou záležitostí. V praxi to znamená vytvoření příslušného software s možností řešit jednotlivé případy jen změnou vstupních parametrů. Dnes jsou na trhu softwarové balíky pro dynamickou analýzu systému mnoha těles (např. ADAMS od MSC <http://www.mscsoftware.com/Products/CAE-Tools/Adams.aspx>, SIMPACK od INTEC GmbH, MBDyn <http://www.aero.polimi.it/mbdyn/>, atd.).

Další informace týkající se principu nejmenší akce a Lagrangeových rovnic 2. druhu jsou uvedeny např. v [30,31].

Lagrangeovy metody zdomácněly i v teorii elektromagnetického pole, mechanice kontinua [19,27], a prostřednictvím Hamiltonovy funkce i v kvantové mechanice.

Poznámka. V odkaze [2] se píše:

Úvahy v Mécanique analytique jsou tak elegantní, že W. R. Hamilton (1805-1865) prohlásil, že toto dílo se dá charakterizovat jedině jako vědecká báseň. Je dobré poznamenat, že Lagrange si povšiml, že mechanika byla částí matematiky podobná 4dimenzionální geometrii – 3 prostorových rozměrů a času. Říká se, že Lagrange se pyšnil tím, že ve své knize nepoužil ani jeden obrázek.

S tiskem knihy však byly problémy. Nedal se najít vydavatel, který by knihu vytiskl. Ale nakonec se podařilo Legendreovi přemluvit jednu pařížskou firmu, aby pod jeho dohledem knihu v roce 1788 vydala.

Proudění tekutin

Rovnice pohybu tekutin formuloval Euler [27]. Jeho první metodu založenou na popisu dráhy elementu kontinua jako bodu prostorové křivky, tj. trojice funkcí $(x(t), y(t), z(t))^T$, v níž roli nezávisle proměnné hraje jen čas t , podrobněji rozpracoval Lagrange. Proto se pro odlišení nazývá Lagrangeova. S elementem kontinua se zachází podobně jako s hmotným bodem.

Druhá metoda, již zůstal název Eulerova metoda, pracuje s vektorem rychlosti elementu kontinua a ten je kromě času také funkcí polohy, tedy $\mathbf{v}(t, x, y, z)$. Pohyb kontinua je pak vyjádřen parciálními diferenciálními rovnicemi. Např. u ideálních tekutin je to Eulerova rovnice, Bernoulliho rovnice atd. [5, 19, 27].

Více o obou metodách lze najít např. v [19,27]. Při analýze proudění tekutin se obvykle zajímáme o rychlostní pole, nikoli o jednotlivé částice – zvlášť u složitějších problémů. A pak se Eulerův popis jeví jako vhodnější [19,27]. Příkladem může být jednoduchý model vytlačování vody z prostoru mezi rovinným dnem a s ním rovnoběžnou obdélníkovou deskou, který slouží k výkladu aquaplaningu pneumatik [32]. Další rozsáhlou a pro praxi důležitou doménou je proudění viskózních tekutin popsaných Navierovou-Stokesovou rovnicí [19,27].

Librační body

Librační bod je prostorový bod, v němž je zrychlení rovno 0 (*librare* = vyvážit, udržovat rovnováhu). V případě dvou těles jako zdrojů síly nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti je jejich interakce vyjádřena přitažlivou nebo odpudivou silou, tedy vzájemné zrychlení je vždy nenulové. U tří těles jsou jejich hmotnosti zdrojem pole přitažlivé síly gravitace. Obvykle se uvažuje případ, kdy jedno z těles má hmotnost mnohem větší než druhé a to zase má hmotnost mnohem větší než třetí. Aby tělesa na sebe nenarazila, musí obíhat menší kolem větších, resp. kolem společných těžišť jednotlivých dvojic. Na systému Země–Měsíc testoval Newton gravitační zákon: odstředivé zrychlení na přibližně kruhové trajektorii Měsíce kolem Země je rovno gravitačnímu zrychlení, které uděluje Země Měsíci. Výpočet je uveden v [18], s. 158. Ideově shodný výpočet výšky stacionární družice nad povrchem Země při zanedbání gravitačního vlivu Slunce jako třetího tělesa je uveden v [25].

Těžiště tří těles leží v okamžité rovině pohybu. Protože však se jejich vzájemná poloha s časem v prostoru mění, jsou trajektorie těles obecně prostorové křivky. I když si problém interakce tří těles zjednodušíme předpokladem, že tělesa zůstávají v pevné rovině, stále zůstává analyticky neřešitelným.

Těžiště sluneční soustavy se pohybuje v kouli ve středu Slunce a s poloměrem < 2.5 poloměru Slunce [33]. Při průměrné vzdálenosti Země od Slunce, $r_{SZ} = 1.496 \times 10^8$ km $= 1.496 \times 10^{11}$ m pohyb těžiště v rozpětí 1.5×10^6 km zanedbáme a těžiště sluneční soustavy ztotožníme s těžištěm Slunce. Dále zanedbáme vliv Měsíce.

Pro výpočet gravitačního zrychlení potřebujeme hodnotu gravitační konstanty. Ta je $G = 6.67428 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ [34]. Hmotnost Slunce M_S je $= 1.98892 \times 10^{30}$ kg [35], hmotnost Země je $M_Z = 5.9737 \times 10^{24}$ kg [36]. Gravitační pole Slunce a Země ve vzdálenosti r od středu Slunce a Země vyvolávají zrychlení:

$$g_S = G M_S r^{-2} = 1.327461 \times 10^{20} r^{-2}, \quad g_Z = G M_Z r^{-2} = 3.987015 \times 10^{14} r^{-2}.$$

Uvažujme nyní těleso obíhající na spojnici Slunce–Země kolem Slunce. Má stejnou úhlovou rychlost jako Země, tj.

$$\omega = \frac{2\pi}{365.25636 \times 24 \times 3600} = 1.9909866 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}.$$

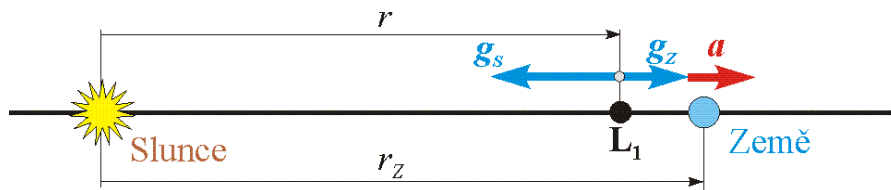
Odstředivé zrychlení tělesa působí na spojnici tělesa se Sluncem ve směru od Slunce a má velikost $a = \omega^2 r \approx 3.96403 \times 10^{-14} r$. V libračních bodech se zrychlení anuluje.

► Librační bod L_1 je v té vzdálenosti r od Slunce, pro niž (obr. 17)

$$f(r) = g_Z + a - g_S = 0, \text{ tj.}$$

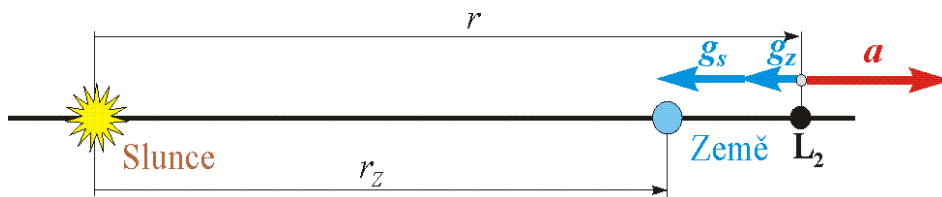
$$3.987015 \times 10^{14} (r - 1.496 \times 10^{11})^{-2} + 3.96403 \times 10^{-14} r - 1.327461 \times 10^{20} r^{-2} = 0.$$

Numerickým řešením této rovnice (např. v EXCELU) vyšlo $r = 1.4811178 \times 10^{11}$ m. Librační bod L_1 je vzdálen od středu Země (směrem ke Slunci) 1.48822×10^9 m, tj. 1 488 220 km.



Obr. 17 – Librační bod L_1 v systému Slunce–Země.

► Librační bod L_2 leží ve směru od Slunce za Zemí (obr. 18).



Obr. 18 – Librační bod L_2 v systému Slunce–Země.

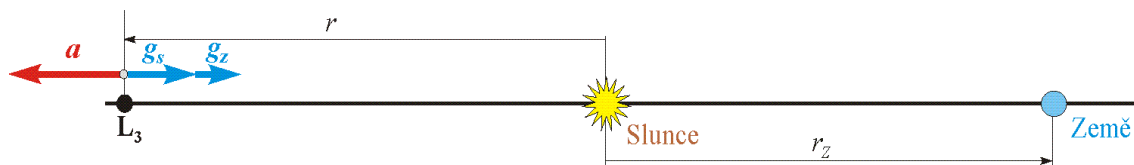
Je určen rovnicí

$$f(r) = a - g_s - g_z = 0, \text{ tj.}$$

$$3.96403 \times 10^{-14} r - 1.327461_{10}^{20} r^{-2} - 3.987015 \times 10^{14} (r - 1.496 \times 10^{11})^{-2} = 0.$$

Numerickým řešením (jednoduše v Excelu) vyšlo $r = 1.511051 \times 10^{11}$ m, tj. bod L_2 je vzdálen od středu Země směrem od Slunce 1.507329×10^9 m, tj. 1 507 329 km.

► Librační bod L_3 je vzhledem ke Slunci na opačné straně než Země (obr. 19).



Obr. 19 – Librační bod L_3 v systému Slunce-Země.

L_3 je určen rovnicí

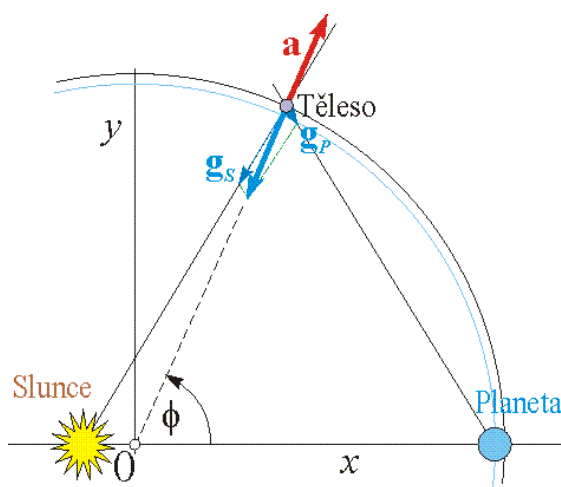
$$f(r) = g_s + g_z - a = 0, \text{ tj.}$$

$$1.327461_{10}^{20} r^{-2} + 3.987015 \times 10^{14} (r + 1.496 \times 10^{11})^{-2} - 3.96403 \times 10^{-14} r = 0.$$

Stejně jako u L_1 , L_2 vyšlo $r = 1.49610378 \times 10^{11}$ m, tj. bod L_3 je vzdálen 2.99206×10^9 m od středu Země ve směru od Slunce, tj. 2 992 082 km $\approx 2 \times r_{SZ} = 2$ AU.

Librační body L_1 , L_2 , L_3 jsou body labilní rovnováhy a vypočetl je už Euler 1760 [37]. Sondy v nich umístěné musí být vybaveny tak, aby mohly korigovat svou polohu. Sondy v bodě L_1 mohou sloužit k výzkumu Slunce, slunečního větru atd. (SOHO = Solar Heliospheric Observatory, NASA [37]). V bodě L_2 je umístěno několik observatoří (COBE, Herschel, PV, [38]). Pomocí stejnoledlosti, vzdáleností a poloměrů Slunce a Země se lze přesvědčit, že asi 90% průmětu Slunce je zakryto Zemí [37].

Lagrange podrobnější analýzou objevil další dva librační body, stabilní, které neleží na spojnici Slunce-Země (obecněji planeta). Planeta vychyluje osu rotace systému Oz směrem k sobě, takže souřadnice (x_s) středu Slunce je záporná (obr. 20).

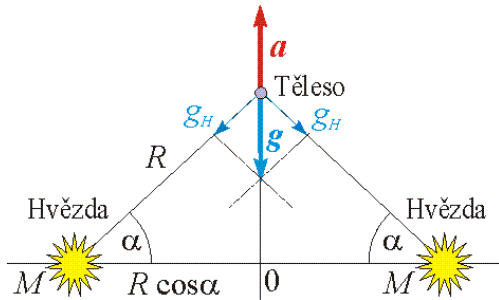


Obr. 20 – Vychýlení Slunce planetou a rovnováha zrychlení tělesa v libračním bodě L_4 .

Hledání libračních bodů L_4 , L_5 vede na rovinný problém, jehož řešení není tak snadné jako v předchozích případech. Práce [38-40] říkají, že Slunce, planeta a L_4 nebo L_5 tvoří rovnostranný trojúhelník. U Jupitera jsou kolem L_4 , L_5 rozsety skupiny planetek nazývané Trójané a Řekové nebo obě Trójané [41-43]. Na dráze Země kolem Slunce nejsou v bodech L_4 , L_5 žádná větší tělesa, ale roku 1997 byl objeven asteroid Cruithne, jehož trajektorie má tvar podkovy kolem L_3 , L_4 , L_5 s oběžnou dobou 770 let [43].

•

Uvažujme nejjednodušší případ malého tělesa obíhajícího kolem těžiště dvou stejně hmotných a blízkých těles (hvězd jako v dvojhvězdě). Vzdálenost tělesa od hvězdy označme R a úhel mezi spojnicí



Obr. 21 – Nejjednodušší systém tří těles se dvěma hvězdami stejné hmotnosti M .

tělesa s hvězdou a spojnicí obou hvězd označme α (obr. 21). Vzdálenost mezi hvězdami je zřejmě $2R \cos \alpha$ a jedna hvězda působí na druhou zrychlením

$$\frac{GM}{(2R \cos \alpha)^2},$$

které je v rovnováze s odstředivým zrychlením při rotaci obou hvězd i tělesa kolem těžiště v bodě 0 stejnou úhlovou rychlostí ω , tj. $a_H = \omega^2 R \cos \alpha$.

Z rovnosti $\frac{GM}{(2R \cos \alpha)^2} = \omega^2 R \cos \alpha$ plyne

$$\omega^2 = \frac{GM}{4R^3 \cos^3 \alpha}.$$

Na třetí těleso působí každá z hvězd zrychlením velikosti

$$g_H = \frac{GM}{R^2}.$$

Vektorový součet obou zrychlení vzhledem k symetrii směřuje do počátku 0 a jeho velikost je

$$2g_H \sin \alpha = 2 \frac{GM}{R^2} \sin \alpha.$$

Toto zrychlení je zase v rovnováze s odstředivým zrychlením $\omega^2 R \sin \alpha$, tj.

$$2 \frac{GM}{R^2} \sin \alpha = \omega^2 R \sin \alpha.$$

Tedy $2GM = \omega^2 R^3$ (připomínka 3. Keplerova zákona) a po dosazení za ω^2 dostaneme

$$2GM = \frac{GM}{4R^3 \cos^3 \alpha} R^3.$$

Odtud jednoduchou úpravou plyne $8 \cos^3 \alpha = 1$ s reálným kořenem $\cos \alpha = 1/2$. Librační body (v intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ s fyzikálním smyslem) jsou tedy určeny úhly

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{3} = \pm 60^\circ.$$

•

Asi nemá smysl se na této úrovni příliš zabývat obecným hledáním L_4 a L_5 , protože v každém bodě vesmíru se uplatňuje gravitace veškeré hmoty vesmíru. Model tří izolovaných těles v rovině je proto idealizací, která může poskytnout jen odhady. Např. u zemských libračních bodů L_4 , L_5 se musí projevovat gravitace Měsíce.

Představu o složitosti skutečných trajektorií kosmických těles v meziplanetárním prostoru ukazují výsledky výpočtů uvedené např. v [45].

Librace Měsíce, stabilita sluneční soustavy

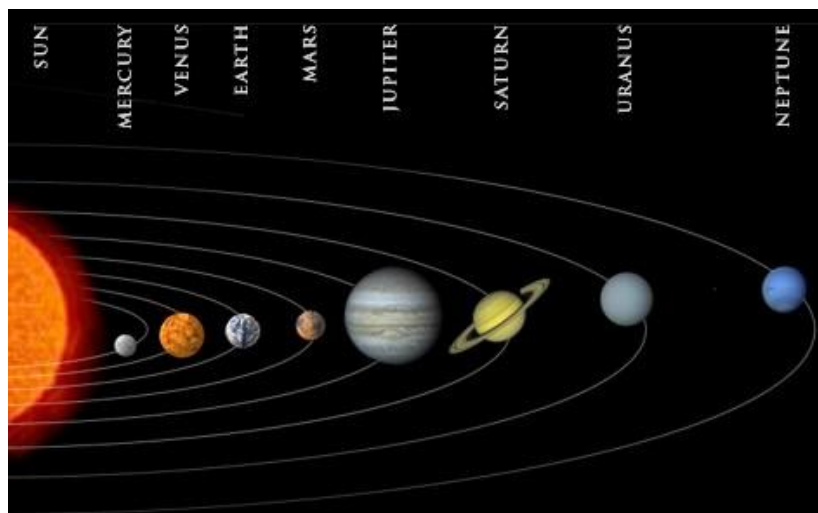
Měsíc díky gravitační vazbě se Zemí je k Zemi sice otočen stále stejnou stranou, ale přesto na oběžné dráze vykonává kolébavý pohyb [46]. Ten objevil už Galileo Galilei (1564–1642). Lagrange se zabýval stabilitou pohybu Měsíce.

Librace Měsíce je důsledkem toho, že ani Měsíc ani Země nejsou přesně sférická a homogenní tělesa. Dále dráha Měsíce kolem Země také není přesně kruhová (oběžná rychlost $r(\phi) \frac{d\phi}{dt}$ se tedy se podle 2. Keplerova zákona, $\frac{1}{2} r^2(\phi) \frac{d\phi}{dt} = \text{const}$, musí měnit) a navíc neleží v rovině ekliptiky. Gravitační interakce Země–Měsíc při obíhání Měsíce tak nutně musí být zdrojem časově závislých změn.

Podrobnější diskusi k Lagrangeovu objasnění librace Měsíce lze najít v [29], Appendix.

Lagrange se pokusil prokázat pomocí prvních aproximací gravitačního potenciálu i stabilitu sluneční soustavy. Později P. S. Laplace použil aproximací 3. řádu a ukázal, že systém Slunce a dvou nejhmotnějších planet Jupitera a Saturna je stabilní, tj. odolný proti vlivu zbývajících planet i náhodným perturbacím. Dnes však modely založené na předpokladu izolovanosti sluneční soustavy musíme chápat jen jako aproximace reality.

Planeta	$\frac{M_{\text{Planeta}}}{M_{\text{Země}}}$
Merkur	0.055
Venuše	0.815
Země	1.0
Mars	0.107
Jupiter	317.771
Saturn	95.131
Uran	14.525
Neptun	17.068



Obr. 22 – Sluneční soustava – http://www.redorbit.com/user_files/images/education/the_sun_101/solarsystem.jpg.



VOLNÉ DOPLŇKY

Uvedený výčet zdaleka nepokrývá všechny objekty, které jsou spojeny s Lagrangeovým jménem. Příkladem může být vzorec pro objem čtyřstěnu s vrcholy $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^3$

$$V(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{1}{6} \det(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_0)$$

nebo to mohou být Lagrangeovy závorky pro zobecněné souřadnice q_k a zobecněné hybnosti p_k , $k = 1, \dots, n$ (kanonické proměnné ve fázovém prostoru) [17–19]

$$[u, v]_{p, q} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right).$$

Newton formuloval základy mechaniky pomocí geometrie. Po něm přišla další etapa – etapa aplikací matematické analýzy.

Říká se:

Euler je Newtonem mechaniky tuhého tělesa a
Lagrange je Newtonem analytické mechaniky.

Kdyby se mě někdo zeptal na srovnání přínosu Lagrange a Eulera, řekl bych, že Eulerův záběr byl velmi široký a razil cesty mnoha novými směry. Lagrangeův záběr byl užší, zato jeho úvahy byly logicky důslednější, obecnější a umožnily pronikat hlouběji k podstatě problémů.

Sluneční soustava zdaleka není deterministický systém, který by se dal popsat malým počtem diferenciálních rovnic. Je součástí Mléčné dráhy a dalšího vesmíru s nepředvídatelnými vlivy. Existuje dost prací, které ukazují její chaotické chování a determinismus jen v omezeném časovém intervalu. Nic jiného nelze ani očekávat. V nitru Slunce probíhají jaderné reakce podle pevných zákonů a jen v důsledku radiace energie se jeho hmotnost nutně mění. Slunce jako hvězda má známý časový vývoj.

<http://scienceworld.cz/matematika/Srazka-Zeme-s-Marsem-a-odlet-Merkuru-4689>

<http://groups.csail.mit.edu/mac/users/wisdom/chaoticss.pdf>

<http://ptrow.com/articles/ChaosandSolarSystem5.htm>

V učebnici mechaniky [18] je na s. 164 v poznámce pod čarou uvedeno, že Lagrange vyřešil Keplerovu rovnici mocninnou řadou konvergující pro eliptické dráhy s numerickou excentricitou $\varepsilon < 0.6627$. V [11] na s. 20 je ukázka, jak Banachova věta (z teorie metrických prostorů) dovoluje na 2 řádcích dokázat, že řešení Keplerovy rovnice lze najít prostou iterací pro $|\varepsilon| < 1$. Tento téměř triviální důsledek uvádím jako demonstraci přínosu moderní matematiky (funkcionální analýzy) ke klasické vědě.



ODKAZY

- [1] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lagrange.html>.
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Louis_Lagrange.
- [3] http://cs.wikipedia.org/wiki/Edmund_Halley , http://en.wikipedia.org/wiki/Edmond_Halley .
- [4] STRUIK, D. J.: *Dějiny matematiky*. ORBIS Praha 1963.
- [5].. http://www.zas.cz/prednasky/prednaska_koutny_euler.pdf .
- [6] <http://www.math.umd.edu/tmme/vol4no1/TMMEv4n1a10.pdf> .
- [7] http://cs.wikipedia.org/wiki/Diofantick%C3%A1_rovnice .
- [8] <http://en.wikipedia.org/wiki/Diophantus> .
- [9] KRÍŽEK, M. – SOMER, L. – ŠOLCOVÁ, A: *Kouzlo čísel*. ACADEMIA Praha 2009.
- [10] BIRKHOFF, G. – MAC LANE, S.: *Prehľad modernej algebry*. ALFA Bratislava 1979 .
- [11] <http://www.koutny-math.com/> (Mathematical Base for Applications) .
- [12] www.koutny-math.com/ | (Numerical Methods & Fourier Analysis).
- [13] [http://en.wikipedia.org/wiki/Spline_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Spline_(mathematics)) .
- [14] http://en.wikipedia.org/wiki/Flat_spline .
- [15] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet I, II*. NČSAV Praha 1955 .
- [16] <http://www1.math.american.edu/People/kalman/pdffiles/lagrange.pdf> (Lagr. multipliers).
- [17] BRDIČKA, M. – HLADÍK, A.: *Teoretická mechanika*. ACADEMIA Praha 1987.
- [18] TRKAL, V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*. NČSAV Praha 1956.
- [19] OBETKOVÁ, V. – MAMRILOVÁ, A. – KOŠINÁROVÁ, A.: *Teoretická mechanika*. Alfa Bratislava 1990.
- [20] ELSGOLC, L. E.: *Variační počet*. SNTL Praha 1965.
- [21] STĚPANOV, V. V.: *Kurs diferenciálních rovnic*. Přírodovědecké nakladatelství Praha 1950.
- [22] GREGUŠ, M. – ŠVEC, M. – ŠEDA, V.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. ALFA Bratislava 1985.
- [23] <http://biography.yourdictionary.com/comte-joseph-louis-lagrange> .
- [24] <http://www.zas.cz/download/gauss.pdf> .
- [25] <http://www.zas.cz/download/newton-predn.pdf> .
- [26] KVASNICA, J. aj.: *Mechanika*. ACADEMIA Praha 1988.
- [27] BRDIČKA, M.: *Mechanika kontinua*. NČSAV Praha 1959.
- [28] http://kdf.mff.cuni.cz/veletrh/sbornik/Veletrh_09/09_02_Bartos.html .
- [29] <http://homes.chass.utoronto.ca/~cfraser/Lagrangemech.pdf> (Počátky Lagrangeovy mechaniky).
- [30] http://en.wikipedia.org/wiki/Principle_of_least_action
- [31] http://www.scholarpedia.org/article/Principle_of_least_action .
- [32] www.koutny-math.com/ | (Geometry & Mechanics of Pneumatic Tires).
- [33] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Solar_system_barycenter.svg , <http://en.wikipedia.org/wiki/Sun> .
- [34] http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_constant .
- [35] http://en.wikipedia.org/wiki/Solar_mass .
- [36] http://en.wikipedia.org/wiki/Earth_mass .
- [37] http://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_three-body_problem .
- [38] <http://fyzmatik.pise.cz/12946-lagrangeovy-body.html> .
- [39] <http://www.astro.cz/clanek/3766> .
- [40] http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point .
- [41] <http://fyzika.jreichl.com/index.php?sekce=browse&page=967> .
- [42] <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:InnerSolarSystem-cs.png> .
- [43] http://www.vectorsite.net/tpecp_06.html .
- [44] <http://www.planetky.cz/article.php3?sid=33> (asteroid Cruithne).
- [45] <http://math.u-bourgogne.fr/sqd-08/gomez.pdf> .
- [46] <http://www.youtube.com/watch?v=6nTmOIkUoTs> (Animace kolébání Měsíce).