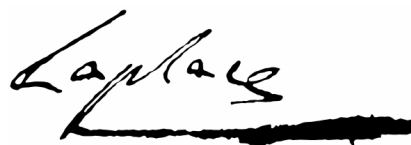


Pierre Simon de LAPLACE

F. KOUTNÝ, Zlín

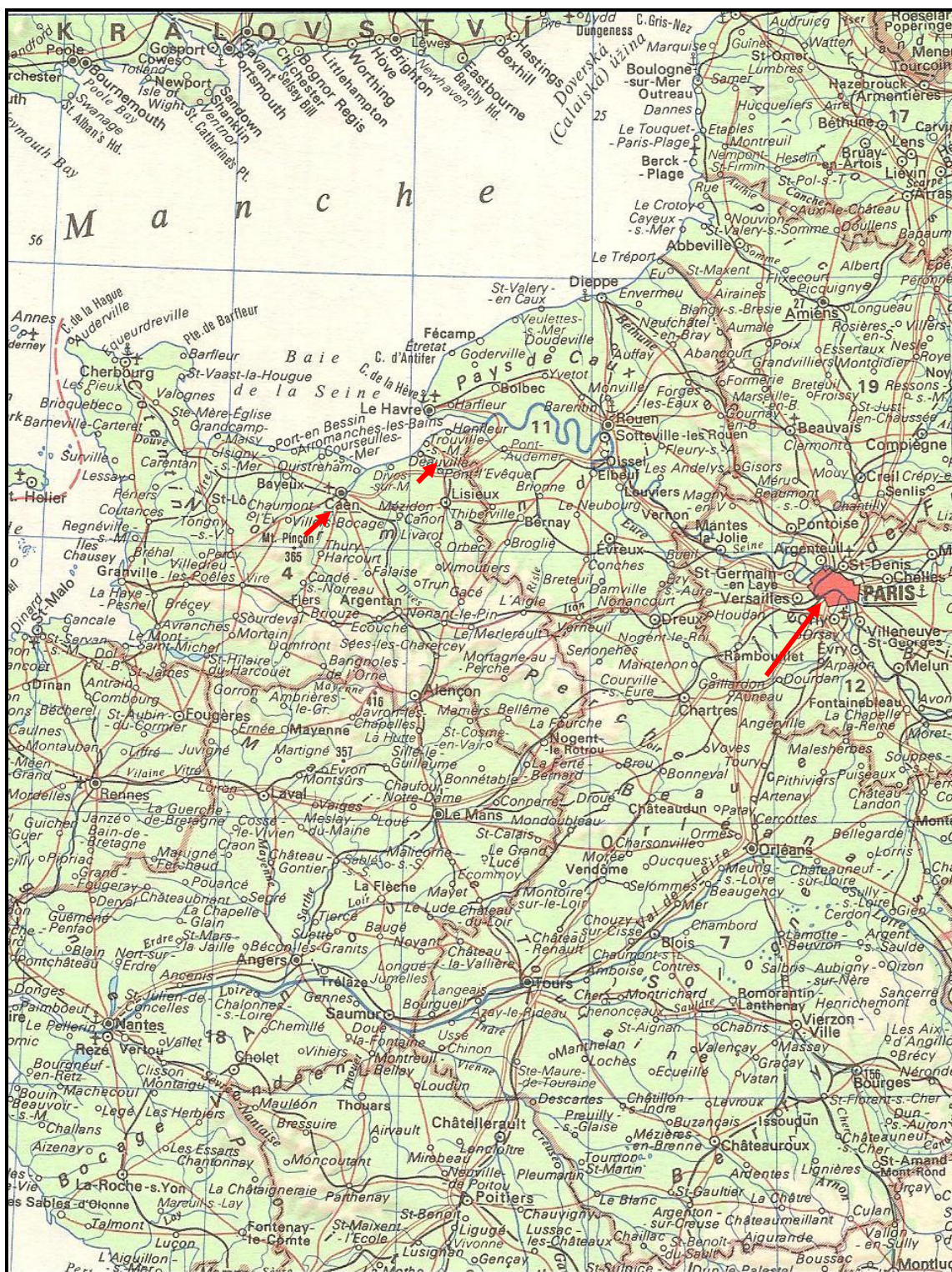
A handwritten signature of Laplace in black ink.

(23^(28?). 3. 1749 – 5. 3. 1827)

Pierre Simon de Laplace byl jedním z nejvlivnějších vědců konce 18. a počátku 19. století. Stal se vůdčí osobností francouzské akademie věd. Jeho hlavními díly jsou Analytická pravděpodobnost (*Probabilité analytique*) a Nebeská mechanika (*Mécanique céleste*). Tato díla spolu s jeho filosofickými pojednáními ovlivňovala vývoj teorie pravděpodobnosti i nebeské mechaniky celé století.

OBSAH

	Str.
ŽIVOTOPIS	1
MATEMATIKA	9
TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI	9
LAPLACEOVA TRANSFORMACE – LETMÝ POHLED	22
ROZVOJ DETERMINANTU	27
MECHANIKA	29
POTENCIÁL	29
LAPLACEŮV DÉMON	33
RYCHLOST ŠÍŘENÍ ZVUKU	34
LAPLACEOVA ROVNICE PRO MEMBRÁNY, KAPILARITA	37
NEBESKÁ MECHANIKA	39
Meridián povrchu rotující kapaliny	40
Obíhání kolem dominantního objektu (centrální pole)	47
Pohyb tří těles v rovině	53
System Slunce – Jupiter – Saturn	61
POZNÁMKA O PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH	66
ODKAZY	67



Šipky vyznačují tři nejdůležitější místa Laplaceova života: uprostřed přibližná poloha *Beaumont-en-Auge*, rodiště a základního vzdělávání, vlevo *Caen* s univerzitou a vpravo *Paříž*, místo Laplaceovy vědecké aktivity (detaily:

<http://www.mapy.cz/#mm=ZTtTcP@x=99816448@y=136422400@z=10>).

ŽIVOTOPIIS

Pierre Simon de Laplace se narodil 23. března 1749 v Beaumont-en-Auge, Normandie, Francie. Jeho otec, Pierre Laplace, byl celkem úspěšným zemědělcem, obchodníkem s moštem a radním; matka, za svobodna Marie-Anne Sochon, pocházela z prosperující zemědělské rodiny, jejíž pozemky byly v okolí Tourgéville [1]. Mnohdy se uvádí, že Laplace pocházel z chudé zemědělské rodiny, ale to se zdá být zkreslené. V rodině se netradovala akademická kariéra, s výjimkou jen jednoho strýce, který snad byl učitelem matematiky na střední škole.

Laplace chodil do benediktinské církevní (proboštské) školy v Beaumont-en-Auge od svých 7 do 16 let. Jeho otec si představoval, že syn bude dělat církevní kariéru, jak bylo tehdy u chlapců běžné: buď kněžství nebo armáda. A skutečně, Laplace v 16 přešel na universitu v Caen, aby studoval bohosloví. Avšak po prvních 2 letech studia v Caen se u něj projevil matematický talent a láska k matematice. Zásahu na tom mají jeho dva učitelé matematiky, Gadbled a Le Canu, o nichž se ví prakticky jen to, že objevili velké Laplaceovy matematické schopnosti.

Jakmile si Laplace předsevzal, že matematika bude oblastí jeho působnosti, už ani universitu v Caen nedokončil a odešel do Paříže. Nesl si doporučující dopis od svého učitele Le Canu pro d'Alemberta. Ten však podle Laplaceova pra-prasynovce nemínil s 19letým hochem ztrácet čas. Dal mu tlustou matematickou knihu s tím, že má přijít, až ji přečte [2]. Když se Laplace vrátil za několik dní, byl d'Alembert ještě nevlídnější. Pak se ale dotazy přesvědčil, že Laplace skutečně knihu zvládl, neboť na všechny ověřující otázky odpověděl správně. Podle jiné verze Laplace do druhého dne vyřešil nějakou obtížnou úlohu, kterou mu d'Alembert zadal. A pak ještě další úlohu.



Podle ještě další verze Laplace napsal d'Alembertovi několik dopisů, ale ty zůstaly bez odpovědi. Proto mu poslal obšírnější pojednání o principech mechaniky. Následovala bezprostřední a nadšená odpověď: “Vy doporučení nepotřebujete – doporučil jste se sám. Máte plné právo na moji podporu”.

Pak d'Alembert nejenže začal usměrňovat Laplaceovo studium matematiky, ale snažil se mu také najít zaměstnání, které by bylo natolik výnosné, aby Laplace mohl v Paříži žít.

Najít místo pro tak nadaného mladého muže nebylo příliš těžké a Laplace se brzy

stal profesorem matematiky na École Militaire. Se stabilním příjmem při nenáročném vyučování se nyní vrhl do vlastního bádání a během 17 let (1771 – 1787) vytvořil mnoho ze své originální práce v astronomii.

Laplaceovi bylo r. 1771 (ve 22 letech!) nabídnuto členství ve Francouzské akademii věd. Ale v tom roce se stal jejím členem A. T. Vandermonde a v dalším J. A. J. Cousin. Laplace byl zklamán a začátkem 1773 d'Alembert napsal do Berlína Lagrangeovi, zda by mu mohl zajistit odpovídající místo v Berlíně. Pak se ale Laplaceův příznivec markýz Condorcet (mj. napsal pamětní spis o Eulerovi, viz [4]) v únoru 1773 stal stálým sekretářem akademie. Brzo nato, už 31. března, se Laplace stal ve 24 letech členem korespondentem akademie a po dvou letech jejím řádným členem (1785).



Z Laplaceova soukromého života můžeme uvést jen to, že se oženil až téměř ve 40 letech. Jeho žena se jmenovala Marie-Charlotte a byla o 20 let mladší. Měli dceru a syna (Sophie-Suzanne a Charles-Émile). Žena při druhém porodu zemřela. Laplace o svém soukromí byl ochoten prozradit jen velmi málo.

V r. 1806 Laplace koupil dům v Arcueil, což tehdy ještě byla vesnice u Paříže. On a jeho nejbližší soused, chemik C. L. Berthollet, tvořili jádro vědecké skupiny, která se stala později známa jako Arcueilská společnost. Vzhledem k tomu, že oba měli přátelské vztahy s Napoleonem, mohli účinně ovlivňovat vývoj francouzské vědy po odborné i personální stránce. Dalšími členy Arcueilské společnosti byli Biot a Poisson.

V tomtéž roce 1806 byl Laplace zvolen do Královské švédské akademie věd jako zahraniční člen.

Napoleon si vždycky přál mít politickou podporu mužů vědy a tak jmenoval Laplace v listopadu 1799 ministrem vnitra. Ani ne po 6 týdnech jej však musel odvolat a později ve svých *Mémoires de Sainte Héle*ne napsal: 'Geometr prvního řádu Laplace se jako podprůměrný administrátor moc dlouho projevovat nemohl, protože hned po jeho prvních opatřeních v úřadě jsme poznali vlastní chybu. Laplace se nedíval na problémy ze správného hlediska: všude hledal podřadné detaily, jen si vymýšlel problémy a nakonec ducha "nekonečně malých veličin" vnášel do státní správy'.

Po Laplaceovi se stal ministrem vnitra Napoleonův bratr Lucien. Aby se Laplace necítil ukřivděn, stal se senátorem a byl mu udělen titul hrabě (comte, 1806). Do 3. dílu své *Mécanique céleste* vložil věnování Napoleonovi jako mírotvorci Evropy. V exemplářích prodávaných po Napoleonově porážce u Waterloo (18. června 1815), abdikaci atd. a restauraci Bourbonů toto věnování bylo přeškrtnuto. Už v roce 1814 (po 'bitvě národů' u Lipska v říjnu 1813, v níž 200 tisíc Napoleonových vojáků bylo poraženo 300 tisíci spojeneckých vojáků) bylo zřejmé, že dny císařství jsou sečteny a Laplace spěchal nabídnout své služby Bourbonům. Roku 1817 mu král Ludvík XVIII udělil vysoký šlechtický titul markýz. Ačkoli Laplaceovo jednání nelze hodnotit jako zrovna nejčestnější, Laplace měl a má pro všechny především hodnotu jako vědec.

(Hierarchie francouzské šlechty: chevalier ↑ baron ↑ vikomte ↑ comte ↑ *marquis* ↑ duc ↑ prince ↑ roi <http://friends.pise.cz/7111-tituly-evropske-slechty.html>).

J. B. Joseph Fourier (1768–1830) jako posluchač École normale 1795 si poznamenal: "Laplace vypadá docela mladě, jeho hlas je tichý, ale jasný, vyjadřuje se přesně i když ne úplně plynule. Vypadá příjemně a obléká se velmi prostě. Je střední postavy. Jeho přednášení matematiky není nijak zvláštní a jeho výklad má rychlý spád..."

Laplace zemřel 1827 v Paříži. Jeho lékař vyňal jeho mozek a uchovával jej mnoho let. Mozek byl nakonec převezen do nestálého anatomického musea v Británii.

Na přání Laplaceova pra-pravnuka byly jeho ostatky přeneseny do Beaumont en Auge.

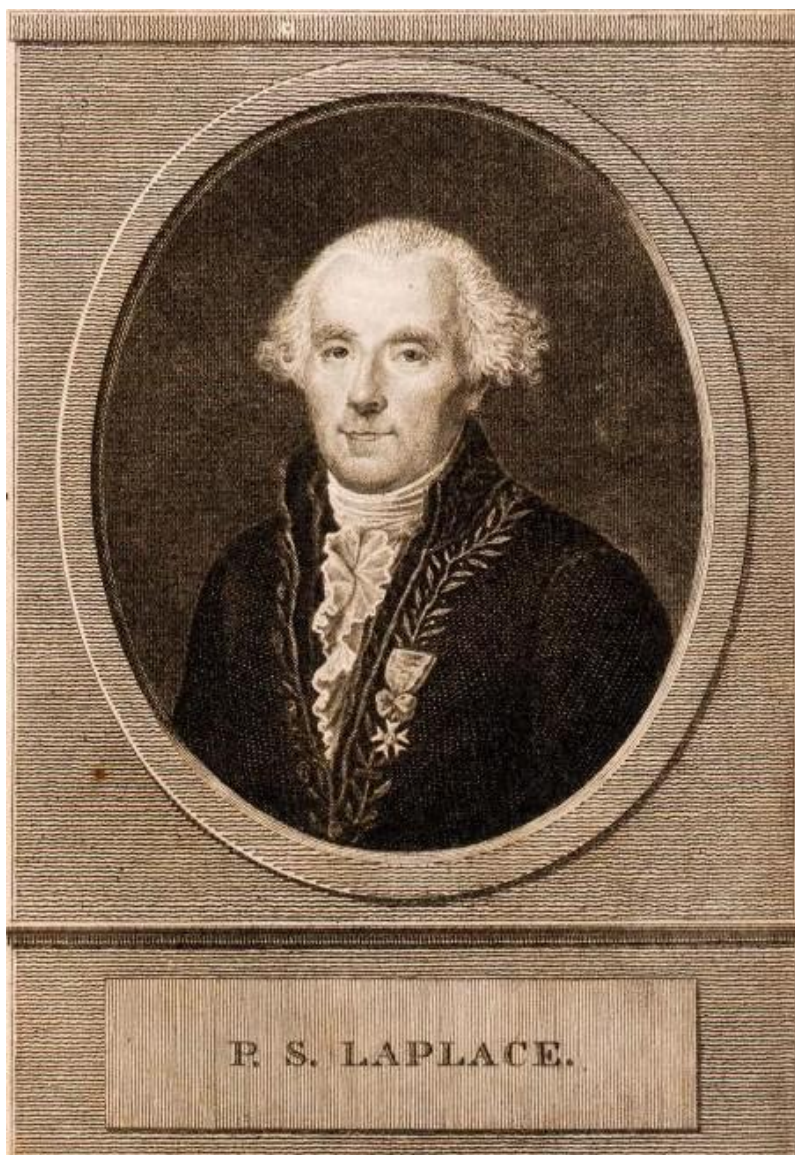
V Laplaceově rodišti Beaumont en Auge je po něm pojmenována ulice Rue Pierre Simon de Laplace (lze najít např. na <http://maps.google.cz/>) a je zde také Laplaceův pomník. V Paříži je Rue Laplace samozřejmě také, na Eiffelově věži je vytesáno jeho jméno jako jedno ze 72.

Laplace byl zvolen do londýnské Royal Society, do Královské akademie v Göttingen, byl členem akademií věd Ruska, Dánska, Švédska, Pruska, Holandska, Itálie, Americké akademie umění a věd, atd.

Asteroid 4628 nese jméno Laplace.



Dalo by se říci, že Laplace byl velký matematik strukturou svého myšlení a díky emocím, které je oživovaly, byl velkým objevitelem. Ovládané nadšení, s nímž se díval na systém přírody, ho provázelo od začátku do konce. Lze je vystopovat v jeho nejčasnější studii i v blouznění poslední nemoci. Díky němu se Laplaceovy mimořádné analytické schopnosti přísně podřizovaly fyzikálnímu zkoumání. K této nezměrné kvalitě intelektu Laplace přidával vzácnou pronikavost ve vnímání analogií a objevování nových faktů skrytých v jeho vzorcích spolu s houževnatostí v duševním zaujetí. Problémy, jakmile byly jednou uchopeny, byly pevně drženy rok za rokem, až do vyřešení. V každém odvětví fyzikální astronomie jsou v tomto pohledu vidět hluboké stopy jeho práce. “On by astronomickou vědu uzavřel,” poznamenal baron J. Fourier, “kdyby ovšem bylo vůbec možné astronomické poznatky uzavřít.”



Laplace poprvé zkoumal stabilitu systému tvořeného prstenci Saturnu, přičemž zdůraznil nutnost jejich rotace a stanovil jejich periodu prakticky totožnou s výsledky Herschelova pozorování, objevil existenci pevné roviny ve sluneční soustavě kolmé na celkový moment hybností planet (http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_plane; Laplaceova rovina).

Dále přinesl znatelný pokrok k teorii astronomické refrakce a přispěl k sestavení uspokojivého výrazu pro barometrické stanovení nadmořské výšky).

Dostatečnou slávu by mu zajistilo odstranění rozporu mezi Newtonovou formulí pro rychlost šíření zvuku a skutečnou rychlostí. Uvažoval zvukové vlny jako tlakové vlny, v nichž kompresi provází vzrůst teploty a vzhledem k velké rychlosti je tento děj adiabatický (bez výměny tepla). Ve spolupráci s A. Lavoisierem se podílel na řadě experimentů při zkoumání specifického tepla. Ty mj. vedly k vynálezu ledového

kalorimetru. Spolu také 1781 předložili do Memoárů akademie příspěvek o vzniku elektřiny při vypařování. Laplace také podal úplnou analýzu kapilárních jevů chemické afinity na základě sil působících na velmi malých vzdálenostech hmotných částic.

K objektům celoživotního Laplaceova zkoumání patřil problém rovnovážného tvaru rotujícího tvárného (tekutého) objektu. První práci na toto téma zaslal do akademie 1773, kdy měl teprve 24 let, a poslední 1817, ve věku 68 let. Výsledky mnoha prací byly začleněny do *Mécanique céleste*. Tvoří zajímavou součást systému vesmíru, neboť vysvětlují tvorbu vesmírných těles postupným nabalováním a tuhnutím další hmoty na jejich povrchu při splnění podmínek rovnováhy. Poskytují také ukázkou produktivity jeho analytického genia. Za podmínky homogenity má výsledné těleso tvar rotačního elipsoidu. Pak se ihned vynořují otázky o gravitační přitažlivosti rotačních elipsoidů a obecnějších sféroidů, tj. těles nepravidelného tvaru blízkého kouli.

Laplace ukázal, že přitažlivé síly lze vypočítat jako derivace jednoduché funkce – potenciálu. Tento přístup se uplatnil nejen v mechanice, ale i v teorii statických polí elektrického a magnetického (např. Weber, Gauss), resp. v teorii elektromagnetického dynamického pole (J. C. Maxwell).

Laplace se zabýval také řešením přidruženého obecnějšího problému přitahování nehomogenních sféroidů, u nichž osa rotace neprochází středem rovníku. K řešení používal rozvoje řešení do sférických harmonických funkcí (ortogonálních funkcí ve dvou proměnných – úhlech). Tyto funkce jsou důležité nejen v problémech gravitace, ale i u dalších, zejména elektromagnetických polí a v atomové fyzice.

Nelze opomenout, že Laplace navázal na Kantovy úvahy o vzniku nebeských těles a ve svém díle *Exposition du système du Monde* formuloval jinou představu o vzniku sluneční soustavy. K tomu se vrátíme na konci tohoto pojednání.

•

Laplace byl jakýmsi zákonodárcem francouzské vědy, zejména exaktních věd. Zajímal se o propojení exaktních věd s ostatními vědami a o filosofické problémy. Vědeckému Laplaceově přínosu věnujeme další kapitoly – matematickou a fyzikální.

•

Skoro všechny dochované Laplaceovy práce vydávalo pod redakcí Pařížské akademie věd nakladatelství Gautier-Villars jako *Oeuvres complètes de Laplace* v letech 1878 až 1912.

Díl 1–5	Pojednání o nebeské mechanice
Díl 6	Výklad systému světa
Díl 7	Analytická teorie pravděpodobnosti
Díl 8–12	Výtahy referátů v Pařížské akademii věd a v matematicko-fyzikální sekci Institute de France
Díl 13–14	Různá pojednání

•

Několik Laplaceových výroků:

- ▶ “Čtěte, čtěte Eulera – on je učitelem nás všech [4].“
- ▶ “Toho, co známe, není mnoho. Toho, co neznáme, je nezměrně víc.“
- ▶ “Příroda se směje našim potížím s integrací.“
- ▶ “Je zřejmé...” (Il est aisé a voir...) bylo často používané slovní spojení v *Nebeské mechanice*, když bylo něco dokázat a nedařilo se, nebo by to bylo zdlouhavé; zpravidla to byl signál, že následuje správné, ale obtížně dokazatelné tvrzení).
- ▶ “Vidíme, že teorie pravděpodobnosti je v podstatě jen selský rozum převedený na výpočty.“
- ▶ “Důležitost důkazu mimořádného požadavku musí být úměrná jeho neobvyklosti.“
- ▶ “...(Tato jednoduchost relací se nebude jevit jako zvláštní, pokud uvážíme, že) všechny projevy přírody jsou jen matematickým důsledkem malého počtu neměnných zákonů.“

(Další: http://www.todayinsci.com/L/Laplace_Pierre/LaplacePierre-Quotations.htm)



Laplaceův pomník v Beaumont en Auge.

V *Théorie analytique des probabilités* (Analytická teorie pravděpodobností) [6] vydané 1812 je toto věnování:

Napoleonovi Velikému.

*Pane, benevolence, s níž Vaše Veličenstvo ráciilo přijmout hold v mojí *Traité de Mécanique Céleste*, mě inspirovalo k přání věnovat Vám tuto knihu o počítání pravděpodobností. Tyto delikátní výpočty se týkají nejdůležitějších životních otázek, které se z největší části jeví jen jako problémy pravděpodobnosti. V tomto pojetí to musí být zajímavé také pro Vaše veličenstvo, jehož genius umí tak dobře ocenit a tak skvěle povzbudit všechny, kdo mohou přispět k pokroku vědy a k obecné prosperitě. Osměluji se požádat Vaši Jasnost, abyste přijal toto nové věnování diktované mým největším uznáním a mými nejoddanějšími city obdivu a úcty, s nimiž, pane a Vaše Veličenstvo, zůstávám Váš nejskromnější a poslušný služebník a věrný poddaný*

Laplace

Možná jde jen o velmi povrchní dojem nebo o tehdejší módu, ale podle historických zmínek to vypadá, že vládci 18. a počátku 19. století, měli k vědě a vědcům (aspoň k některým) osobnější vztah než dnešní vládci (presidenti) [4, 5] a skutečně se o jejich práci zajímali. Napoleon byl dokonce členem matematické sekce Francouzského Institutu, který založil v Káhiře při tažení do Egypta (1798). A jako 16letý mladík úspěšně složil u Laplacea zkoušku z matematiky ve vojenské škole. Mezi významnými vědci, kteří se výpravy do Egypta zúčastnili, byli mimo jiné:

- [Gaspard Monge](#) – matematik a geometr, zakladatel [deskriptivní geometrie](#), organizátor vědecké části expedice, první předseda Egyptského institutu.
- [Claude Louis Berthollet](#) – chemik, organizátor vědecké části expedice.
- [Joseph Fourier](#) – matematik a fyzik. Druhý předseda Egyptského institutu. Při výzkumu v Egyptě vznikly základy jeho pozdějšího díla *Analytická teorie tepla*.

(http://cs.wikipedia.org/wiki/Napoleonovo_egyptsk%C3%A9_ta%C5%BEn%C3%AD)

•

Dnešní politika a vládnutí, zvláště v demokratickém systému, jsou asi složitější. Také věda vyžaduje velkou specializaci a pro laiky je mnohem nesrozumitelnější, než tomu bývalo kdysi.

•

Dále se budeme věnovat tématům, kterými se Laplace zabýval – z dnešního pohledu a s dnešními prostředky. Studium originálů Laplaceových prací, které jsou možná někde ve vědeckých knihovnách, patří spíš do kompetence historiků.



MATEMATIKA

TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

Jednou z oblastí matematiky, v níž je a bude trvale zapsáno Laplaceovo jméno, je teorie pravděpodobnosti. Laplace 1819 vydal knihu *Théorie analytique des probabilités* jako základní a obšírné pojednání o teorii pravděpodobnosti jako matematické disciplíně. Základní definice pojmů jako nezávislost pokusů, podmíněná pravděpodobnost atd. zůstaly už trvalou součástí této matematické disciplíny. O teorii pravděpodobnosti existuje bohatá literatura. Základní fakta a filosofické poznámky jsou uvedeny také v [7]. Dále lze doporučit obsáhlou knihu [8]. Zde uvedeme jen několik ilustrací a příkladů.

Pro zpřesnění představy o Laplaceově přínosu uvádíme obsah jeho Analytické teorie pravděpodobnosti [6].

THÉORIE ANALYTIQUE DES PROBABILITÉS

1. ÚVOD

KNIHA I. Počítání s vytvořujícími funkcemi.

ČÁST I. Obecné úvahy o základech veličin.

Kapitola I. O vytvořujících funkcích jedné proměnné.

Kapitola II. O vytvořujících funkcích dvou proměnných.

ČÁST II. Teorie aproximací výrazů s funkcemi velmi velkých čísel.

Kapitola I. Integrace pomocí aproximací diferenciálů, které obsahují faktory s vysokými mocninami.

Kapitola II. Integrace pomocí aproximací lineárních rovnic s konečnými nebo nekonečně malými diferencemi.

Kapitola III. Použití předchozích metod k aproximaci různých funkcí velmi velkých čísel.

KNIHA II. Analytická teorie pravděpodobnosti.

Kapitola I. Obecné principy teorie (Odstavce 1 a 2, str. 181–190).

Kapitola II. Pravděpodobnost událostí složených z elementárních jevů s danými pravděpodobnostmi (str. 191–279).

Kapitola III. Zákony pravděpodobnosti, které jsou výsledkem neurčeného násobení událostí (str. 280–308).

Kapitola IV. Pravděpodobnost chyb průměrů výsledků velkého počtu pozorování a nejvhodnější odhady (s. 309–354).

Kapitola V. Použití výpočtů pravděpodobnosti při zkoumání jevů a jejich příčin (s. 355–369).

Kapitola VI. Pravděpodobnost příčin a předpovědí na základě dat pozorování (s. 370–409).

Kapitola VII. O vlivu neznámých nerovností, které mohou existovat u zdánlivě naprosto stejně pravděpodobných jevů (s. 410–415).

Kapitola VIII. O střední době délky života, manželství atd. (s. 416–427).

Kapitola IX. O výhodách závislých na pravděpodobnosti budoucích událostí (s. 428–440).

Kapitola X. O morálním očekávání (s. 441–454).

Kapitola XI. O pravděpodobnosti pravdivosti svědectví (s. 455–470).

DODATKY

I. Odvození Wallisova výrazu pro π ve formě nekonečného součinu z knihy I (s. 471–479).

II. Přímý důkaz výrazu č. 40 z knihy I (s. 480–485).

III. Důkaz vzorce č. 42 z knihy I (s. 485–493).

DOPLŇKY

V knize [9] se píše:

“Essai philosophique sur les probabilités (Filosofický esej o pravděpodobnosti) je snadno čitelný úvod do teorie pravděpodobnosti, definované na základě předpokladu stejně možných jevů.

Teorie pravděpodobnosti spočívá v převedení všech událostí téhož druhu na určitý počet stejně možných případů, tj. takových případů, o jejichž výskytu víme stejně málo, a v určení počtu těch případů, které jsou pro jev, jehož pravděpodobnost hledáme, příznivé.“

Teorie pravděpodobnosti zůstala víc než celé století na koncepční úrovni Laplaceově, tedy jako nástroj ke studiu problémů s neúplnou vstupní informací.

Laplace už 1779 naznačil, že pravděpodobnosti P , s níž diskrétní náhodná veličina X nabývá hodnot $k = 0, 1, \dots$, tedy $P(X = k)$, je dají brát jako koeficienty polynomů nebo polynomů nekonečného stupně čili mocninných řad. Takto sestavená funkce

$$G_X(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$$

se nazývá *vytvorující funkce* náhodné veličiny X .

Příklad 1. Binomické rozdělení. Na hrací kostce se počty bodů 1, 2, ..., 6 vyskytují se stejnou pravděpodobností $p = 1/6$. Zajímejme se např. o pravděpodobnosti p_k , s jakými při 3 hodech kostkou padne šestka k -krát. Je obecně známo [6,7], že tato pravděpodobnost je dána binomickým rozdělením

$$P(X = k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k},$$

$$\text{tj. } p_0 = P(X = 0) = \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 = (1-p)^3 = \frac{125}{216}, \quad p_1 = P(X = 1) = \binom{3}{1} p^1 (1-p)^2 = 3 \frac{1}{6} \frac{25}{6^2} = \frac{75}{216},$$

$$p_2 = P(X = 2) = \binom{3}{2} p^2 (1-p) = \frac{15}{216}, \quad p_3 = P(X = 3) = \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = \frac{1}{216}.$$

Vytvořující polynom je tedy

$$G_X(z) = \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 z^0 + \binom{3}{1} p^1 (1-p)^2 z^1 + \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 z^2 + \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 z^3 = ((1-p) + pz)^3.$$

Z něj zpětně dostaneme příslušné pravděpodobnosti:

$$p_0 = G_X(0) = (1-p)^3$$

a postupně dále

$$p_1 = \frac{d}{dz} G_X(0) = \frac{d}{dz} ((1-p) + pz)^3 \Big|_{z=0} = 3((1-p) + pz)^2 p \Big|_{z=0} = 3(1-p)^2 p,$$

$$p_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} G_X(0) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} ((1-p) + pz)^3 \Big|_{z=0} = \frac{1}{2!} 3 \times 2 ((1-p) + pz) p^2 \Big|_{z=0} = 3(1-p) p^2,$$

$$p_3 = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} G_X(0) \Big|_{z=0} = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} (p + (1-p)z)^3 \Big|_{z=0} = \frac{1}{3!} 3 \times 2 \times 1 p^3 \Big|_{z=0} = p^3.$$

Příklad 2. Pro Poissonovo rozdělení

$$p_k = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

je

$$p_0 = e^{-\lambda}, \quad p_1 = e^{-\lambda} \frac{\lambda}{1!} = e^{-\lambda} \lambda, \quad p_2 = e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!}, \quad \dots$$

a vytvořující funkce

$$G_X(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots = e^{-\lambda} \left[1 + \frac{\lambda}{1!} z + \frac{\lambda^2}{2!} z^2 + \dots + \frac{\lambda^k}{k!} z^k + \dots \right] = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.$$

Vytvořující funkce tvoří jeden ze základních pojmů v Laplaceově výkladu pravděpodobnosti [8]. Definujeme-li např. s -tý moment diskrétní náhodné veličiny vztahem

$$M_s = \sum_{k=0, 1, \dots} k^s p_k,$$

pak platí

$$\lim_{z \rightarrow 1-} G_X(z) = \lim_{z \rightarrow 1-} (p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots) = \sum_{k=0, 1, \dots} p_k = 1 = M_0,$$

$$\lim_{z \rightarrow 1-} G'_X(z) = \lim_{z \rightarrow 1-} (p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 + \dots) = \sum_{k=1, 2, \dots} k p_k = M_1,$$

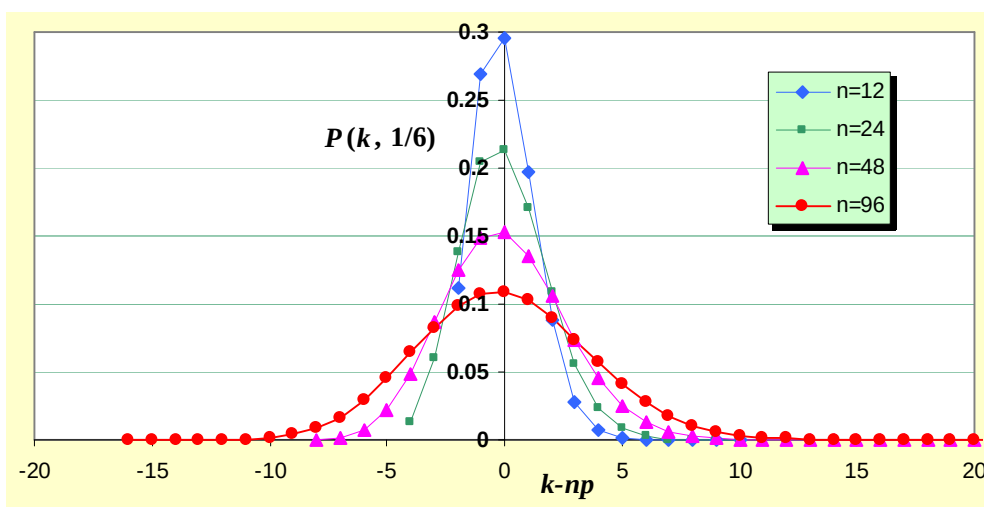
$$\lim_{z \rightarrow 1-} G''_X(z) = \lim_{z \rightarrow 1-} (2 \times 1 p_2 + 3 \times 2 p_3 z + \dots) = \sum_{k=2, 3, \dots} k(k-1) p_k = M_2 - M_1,$$

a *střední hodnota* diskrétní náhodné veličiny je $EX = M_1$,

$$\text{variance (rozptyl)} \quad \text{var } X = \sigma^2 = M_2 - M_1^2 = \lim_{z \rightarrow 1-} [G''_X(z) + G'_X(z)(1 - G'_X(z))].$$

Binomické rozdělení a normální rozdělení

Označme p konstantní pravděpodobnost výskytu sledovaného jevu v každém pokusu, n celkový počet pokusů a k celé číslo, $0 \leq k \leq n$. Počet výskytů sledovaného jevu v n pokusech je náhodná veličina X . Pravděpodobnost $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ definuje binomické rozdělení $\text{Bi}(n, p)$. V příkladě 1 jsme pracovali s $\text{Bi}(3, \frac{1}{6})$.



Obr. 1 – Hustoty binomických rozdělení pro $p = \frac{1}{6}$ a různých n při transformaci k a $k-np$.

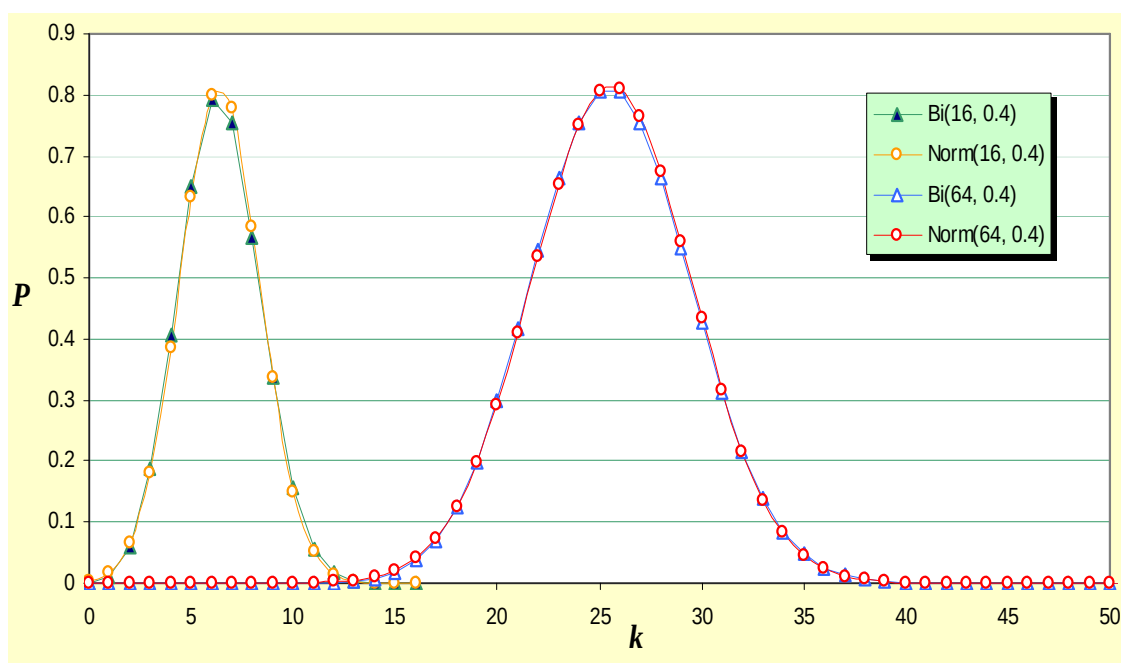
Obr. 1 ukazuje průběh hustot pravděpodobnosti pro rostoucí n při konstantním p . Je vidět, že s rostoucím n se lomená spojnice hustot $\text{Bi}(n, \frac{1}{6})$ vyhlazuje a je nasnadě myšlenka aproximace těchto čar hladkou symetrickou exponenciální funkcí ve tvaru

$$f_n(x) = A(n) e^{-C(n,p)(x-np)^2}.$$

S touto ideou poprvé přišel *Abraham de Moivre* (1667–1754), francouzský emigrant v Británii, který mj. napsal knihu o teorii pravděpodobnosti *The Doctrine of Chances* oceňovanou hazardními hráči [8]. Laplace jeho úvahy podstatně zpřesnil.

Moivreova–Laplaceova věta. Posloupnost hustot binomického rozdělení $\text{Bi}(n, p)$ konverguje s rostoucím n stejně rychle a ke stejné limitě jako posloupnost hustot normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ se střední hodnotou $\mu(n, p) = np$ a rozptylem $\sigma^2(n, p) = np(1-p)$, tj. pro $k = 0, 1, \dots, n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(n,p)}} e^{-\frac{(k-\mu(n,p))^2}{2\sigma^2(n,p)}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}} = 1.$$



Obr. 2 – Náznak konvergence hustoty binomického rozdělení pro $p = 0.4$ k hustotě normálního rozdělení $N(np, np(1-p))$ pro $n = 16, 64$.

Důkaz této věty přímým způsobem pomocí Stirlingovy formule [7,8] pro odhady faktoriálu a limitním přechodem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{Bi}(n, p, k)}{f_N(n, p, k)} = 1$$

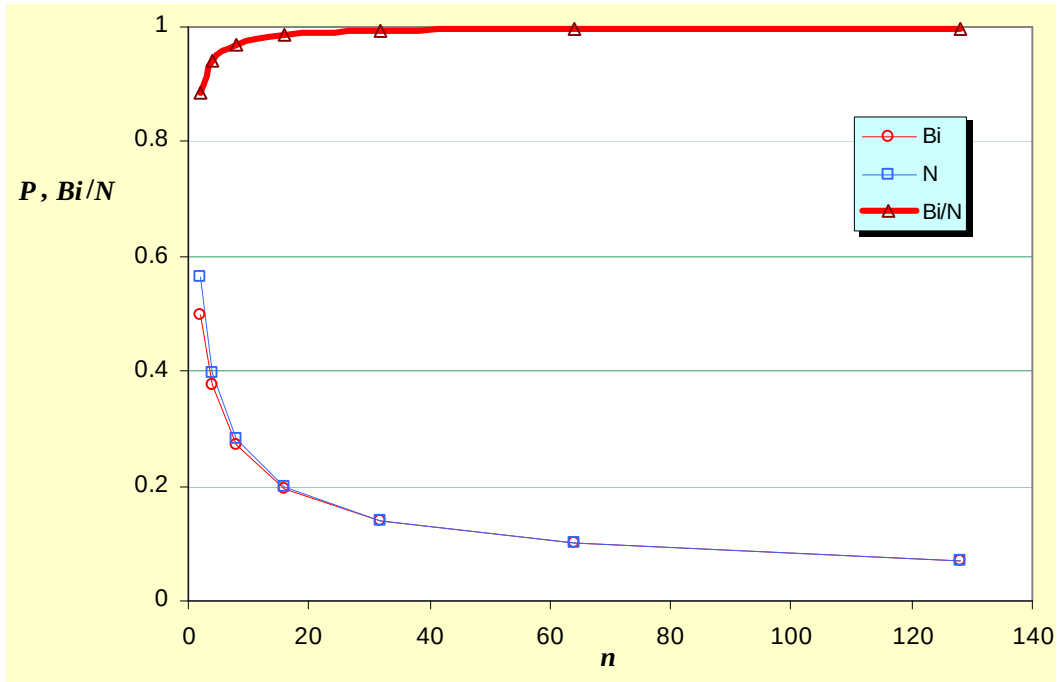
je zdoluhavý. Na obr. 3 je ilustrace pro $p = \frac{1}{2}$.

V případě sudého $n = 2m$ a $p = \frac{1}{2}$ je důkaz jednoduchý.

$$\frac{f_{Bi}(n, p, m)}{f_N(n, p, m)} = \frac{\binom{2m}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2m-m}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2m \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)}} e^{-\frac{(m-2m \cdot \frac{1}{2})^2}{2 \times 2m \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)}}} = \sqrt{\pi m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \binom{2m}{m} = \sqrt{\pi m} 2^{-2m} \frac{(2m)!}{m! m!}.$$

Stirlingova formule pro velká s zní $s! \approx \sqrt{2\pi s} s^s e^{-s} e^{\frac{\theta}{12s}} \approx \sqrt{2\pi s} s^s e^{-s}$, takže

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f_{Bi}(2m, \frac{1}{2}, m)}{f_N(n, p, m)} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\pi m} 2^{-2m} \frac{(2m)!}{m! m!} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\pi m} 2^{-2m} \frac{\sqrt{2\pi \times 2m} (2m)^{2m} e^{-2m}}{2\pi m m^{2m} e^{-2m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2\pi m m^{2m} e^{-2m}}{2\pi m m^{2m} e^{-2m}} = 1. \end{aligned}$$



Obr. 3 – Konvergence binomického rozdělení k příslušnému normálnímu rozdělení pro $p = \frac{1}{2}$.

Elegantní důkaz založený na pojmu charakteristické funkce uvádí van der Waerden [11].

Laplace do své knihy o pravděpodobnosti zahrnul také všechny významné poznatky svých předchůdců, tedy H. Cardana, P. Fermata, B. Pascala a dalších. Jeho pojetí pravděpodobnosti překonala teprve axiomatická teorie pravděpodobnosti, kterou na bázi teorie množin, míry a integrálu formuloval 1933 A. N. Kolmogorov (1903–1987) [7,8]. Jde v podstatě o přiřazení číselné hodnoty jevům, které se chápou jako množiny v univerzálním jevovém poli. Toto pojetí pravděpodobnosti je dnes dominantní.

•

$$\text{Laplaceův integrál} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Integrand $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ je definován i s derivacemi libovolného řádu na celé reálné ose $\mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$, je klesající na intervalu $(0, \infty)$ ($\frac{d}{dt}g(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}} < 0$) a má maximum v bodě 0, $g(0) = e^0 = 1$ ($\frac{d}{dt}g(0) = 0$ a $\frac{d^2}{dt^2}g(0) = -1$).

Zvolme velká M, N tak, že $M < N$. Zřejmě

$$\int_M^N e^{-\frac{t^2}{2}} dt < \int_M^N e^{-\frac{M^2}{2}} dt < e^{-\frac{M^2}{2}} (N - M) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

(Pro ilustraci položme $f(M, N) = e^{-\frac{M^2}{2}} (N - M)$, $N = 10^M$ a vypočítejme několik hodnot. Např. $f(8, 10^8 - 8) = 1.013 \times 10^{-10}$, $f(16, 10^{16} - 16) = 4.116 \times 10^{-39}$, $f(32, 10^{32} - 32) = 1.408 \times 10^{-39}$)

Integrál $\int_M^N e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ můžeme tedy volbou M udělat libovolně malým a to značí, že

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ existuje [12]. Substitucí } u = \frac{t}{\sqrt{2}} \text{ dostaneme } \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \text{ Pak } \Phi(\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

K numerickému výpočtu integrálu $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ lze použít rozvoje exponenciály ve stejnoměrně konvergentní řadu a integrace jednotlivých členů [12,7], tj.

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= \int_0^x \left[1 - \left(\frac{t^2}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^3 + \dots \right] dt = x - \frac{x^3}{3 \times 2} + \frac{x^5}{5 \times 2! \times 2^2} - \frac{x^7}{7 \times 3! \times 2^3} + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3 \times 2} + \frac{x^5}{5 \times 2! \times 2^2} - \frac{x^7}{7 \times 3! \times 2^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1) 2^k k!}. \end{aligned}$$

Označíme-li členy řady a_k , $a_0 = x$, lze výpočet zjednodušit rekurentním vztahem

$$a_k = -\frac{2k-1}{2k+1} \times \frac{1}{k} \times \frac{x^2}{2} \times a_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

a provést jej snadno v EXCELU. Následuje tabulka s hodnotami a_k pro $x = 0.5$.

k	a_k
0	0.500000000000
1	-0.020833333333
2	0.000781250000
3	-0.00002325149
4	0.00000056514
5	-0.00000001156
6	0.00000000020
7	0.00000000000

Vidíme, že absolutní hodnoty členů a_k rychle klesají a už $|a_7| < 10^{-11}$. Sečtením členů a_k dostaneme

$$\sum_{k=0,1,\dots} a_k = 0.47992521896\dots$$

Tedy

$$\Phi(0.5) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0,1,\dots} a_k = 0.69146246127.$$

Laplaceův integrál $\Phi(x)$ lze ovšem počítat také metodami numerické integrace, např. Gaussovou kvadraturou [13,14]. EXCEL nás svými funkcemi NORMSDIST nebo NORMSINV zbavuje práce s přímými výpočty $\Phi(x)$ nebo řešením rovnice $\Phi(x) = p$, v níž p je zadaná pravděpodobnost.

Např. NORMSDIST(0.5) = 0.69146246127401, NORMSINV(0.69146246127401) = 0.5.

Distribuční funkci normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 [7,8,11]

$$F_N(x|\mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

převéde substituce

$$t = \frac{u-\mu}{\sigma} \quad (u = \mu + \sigma t, \quad du = \sigma dt)$$

na normovaný tvar (normálního standardizovaného rozdělení $N(0, 1^2)$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Místo názvu normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ se někdy užívá názvu Gaussovo rozdělení, nebo Laplaceovo-Gaussovo rozdělení. Funkce

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

se nazývá chybová funkce (error function) nebo Gaussova chybová funkce. Snadno se ověří (substituce $t = \sqrt{2} u$), že

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

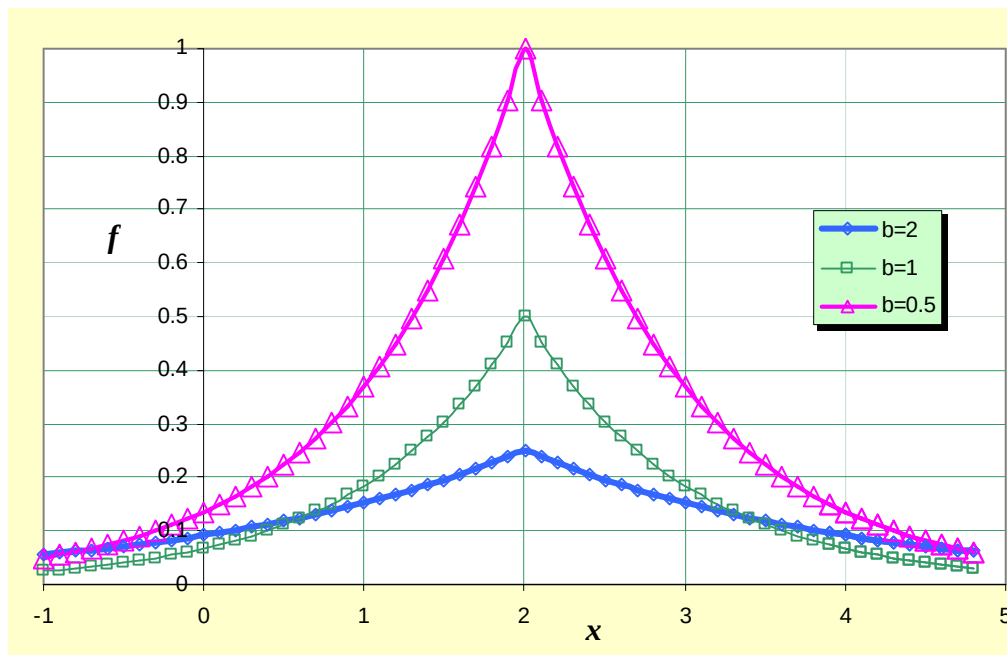
Např. $F_N(\mu) = \Phi(0) = 0.5$ nebo (víme [12], že $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

$$F_N(\infty) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\infty)] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right] = 1.$$

Laplaceovo rozdělení nebo dvojité exponenciální rozdělení ,

$$f_L(x; \mu, b) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}},$$

je spojitě a symetrické kolem bodu $x = \mu$, takže s normálním rozdělením má některé podobné geometrické rysy (obr. 4).



Obr. 4 – Hustoty Laplaceova rozdělení $f_L(x; a, b) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-a|}{b}}$ pro $a = 2$ a různá b .

Střední hodnota náhodné veličiny X se spojitou hustotou pravděpodobnosti f je [7]

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

V našem případě (integrace per partes)

$$\begin{aligned} EX &= \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx = \frac{1}{2b} \left[\int_{-\infty}^{\mu} x e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx + \int_{\mu}^{\infty} x e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx \right] \\ &= \frac{1}{2b} \left[b x e^{\frac{x-\mu}{b}} \Big|_{-\infty}^{\mu} - b \int_{-\infty}^{\mu} e^{\frac{x-\mu}{b}} dx - b x e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \Big|_{\mu}^{\infty} + b \int_{\mu}^{\infty} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx \right] \\ &= \frac{1}{2b} \left[b\mu - e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \Big|_{-\infty}^{\mu} + b\mu - e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \Big|_{\mu}^{\infty} \right] = \frac{1}{2b} [2b\mu - 1 + 1] = \mu, \end{aligned}$$

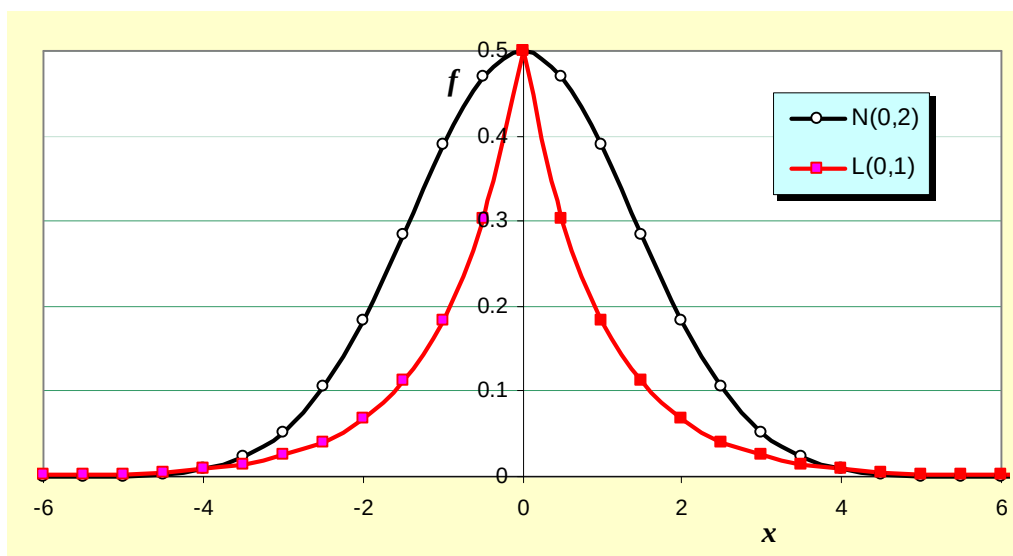
což se vzhledem k symetrii vzhledem k $x = \mu$ dalo očekávat.

Výpočet variance Laplaceova rozdělení je rovněž jednoduchý.

$$\text{var } X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_L(x) dx = \frac{1}{2b} \left[\int_{-\infty}^{\mu} (x - \mu)^2 e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx + \int_{\mu}^{\infty} (x - \mu)^2 e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx \right].$$

Substitucí $x - \mu = bt$ dostaneme meze $t(\mu) = 0$, $t(\infty) = \infty$ a dále

$$\begin{aligned} \text{var } X &= \frac{1}{2b} b^2 \left[\int_{-\infty}^0 t^2 e^{-(-t)} b dt + \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} b dt \right] \\ &= \frac{1}{2} b^2 \left[t^2 e^t \Big|_{-\infty}^0 - 2 \int_{-\infty}^0 t e^t dt - t^2 e^{-t} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} t e^{-t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} b^2 \left[-2(t e^t \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^t dt) + 2(-t e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} dt) \right] \\ &= b^2 \left[e^t \Big|_{-\infty}^0 - e^{-t} \Big|_0^{\infty} \right] = 2b^2. \end{aligned}$$



Obr. 5 – Hustoty Laplaceova rozdělení $f_L(x; 0, b) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-0|}{b}}$ a normálního rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{x^2}{4b^2}} \text{ pro } \mu = 0 \text{ a } b = 1.$$

Náhodná veličina X s Laplaceovým rozdělením $L(\mu, b)$ se dá modelovat pomocí standardního rovnoměrného rozdělení U s hodnotami $[0, 1)$ tak, že se odděleně invertují obě exponenciální větve ($x \leq \mu$, $x \geq \mu$)

$$U(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \exp(-\frac{x-\mu}{b}) & \text{pro } x \geq \mu \\ \exp(\frac{x-\mu}{b}) & \text{pro } x \leq \mu \end{cases} \longrightarrow X(u) = \begin{cases} \mu - b \ln(2 - 2u) & \text{pro } u \geq 0.5 \\ \mu + b \ln(2u) & \text{pro } u \leq 0.5 \end{cases}.$$

To lze elegantněji zapsat ve tvaru

$$X = \mu + b \operatorname{sign}(0.5 - u) \ln(1 - 2|0.5 - u|),$$

tj. pro $\mu = 0$ a $b = 1$

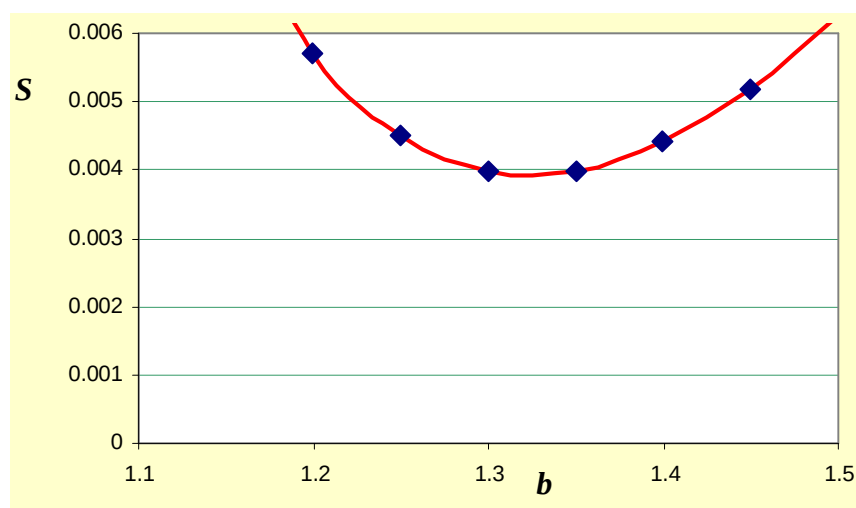
$$X = \operatorname{sign}(0.5 - u) \ln(1 - 2|0.5 - u|).$$

Rozborem demonstračního souboru s $n = 507$ takto vygenerovaných hodnot X jsme získali četnosti n_{-6} = počet X , pro něž $X \leq -5.5$, n_{-5} = počet X , pro něž $-5.5 < X \leq -4.5$,

..., n_5 = počet X , pro něž $4.5 < X \leq 5.5$, n_6 = počet X , pro něž $5.5 < X$. Pro dané b vypočteme srovnávací kritérium [7]

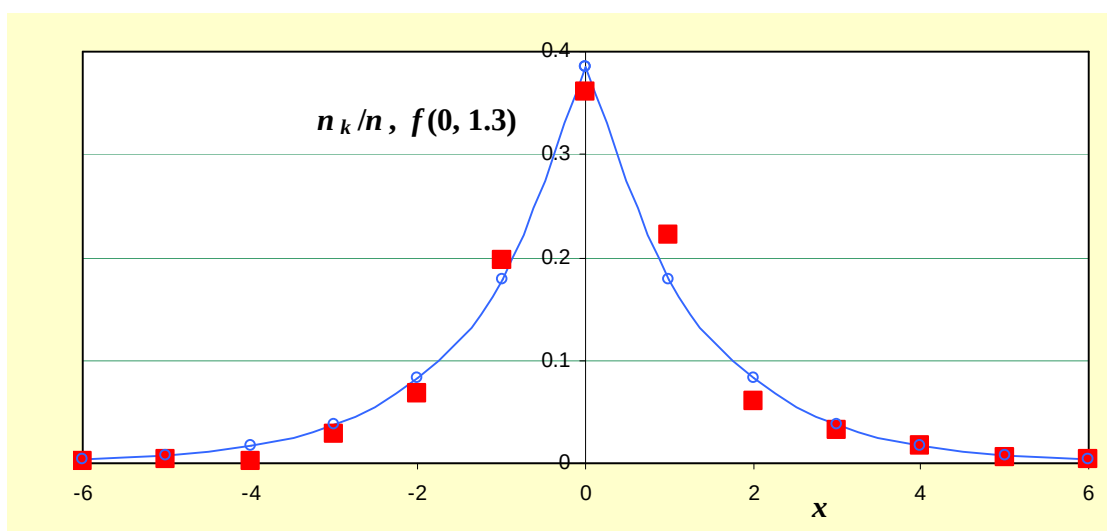
$$S(b) = \sum_{k=-6}^6 \left(\frac{1}{2b} e^{-\frac{k}{b}} - \frac{n_k}{n} \right)^2.$$

Graf funkce $S(b)$ pro uvažovaný případ simulace na obr. 6 ukazuje, že S nabývá minima v okolí $b = 1.3$. Spokojíme se s touto aproximací parametru b .



Obr. 6 – Průběh funkce $S(b)$ pro soubor 507 simulovaných hodnot X z rozdělení $L(0, b)$.

Obr. 7 ukazuje relativní četnosti n_k/n a hustotu f_L rozdělení $L(0, 1.3)$.



Obr. 7 – Relativní četnosti určené modelováním rozdělení $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ a srovnání s hustotou f_L s parametrem $b = 1.3$.

Laplaceovo rozdělení se dá použít při analýze jevů v okolí bodů labilní rovnováhy, u vratných chemických procesů, při analýze obrazu apod., tedy tam, kde měřená náhodná veličina závisí exponenciálně na absolutní hodnotě jiné veličiny.

Bayesovský přístup

Laplaceovi se klade za zásluhu, že znovuoobjevil pojem podmíněné pravděpodobnosti a cestu ke zpřesňování (*apriorní*) pravděpodobnosti po dodatečném doplnění informací např. experimentem (tzv. *aposteriorní* pravděpodobnost). Východiskem je vzorec pro úplnou pravděpodobnost. Může-li jev A nastat jen tehdy, když současně nastane některý z navzájem nezávislých jevů (hypotéz) $H_1, \dots, H_n$, které dohromady tvoří jistý jev [7,8],

$$P(H_1 \cup \dots \cup H_n) = P(H_1) + \dots + P(H_n) = 1,$$

je

$$P(A) = P(H_1) P(A|H_1) + \dots + P(H_n) P(A|H_n),$$

přičemž pro $k = 1, \dots, n$ značí $P(A|H_k)$ pravděpodobnost jevu A za podmínky, že zároveň nastane (platí) H_k . Tato *podmíněná* pravděpodobnost je

$$P(A|H_k) = \frac{P(A \cap H_k)}{P(H_k)} \quad \text{pro } k = 1, \dots, n.$$

Pro pravděpodobnost, že platí hypotéza H_k , když nastal jev A , platí *Bayesova formule* [16,17]

$$\begin{aligned} P(H_k|A) &= \frac{P(H_k) P(A|H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k) P(A|H_k)}{P(H_1) P(A|H_1) + \dots + P(H_n) P(A|H_n)} \\ &= P(H_k) \frac{P(A \cap H_k)}{P(H_k)} \times \frac{1}{P(H_1) \frac{P(A \cap H_1)}{P(H_1)} + \dots + P(H_n) \frac{P(A \cap H_n)}{P(H_n)}} \\ &= \frac{P(A \cap H_k)}{P(A \cap H_1) + \dots + P(A \cap H_n)}. \end{aligned}$$

(*Thomas Bayes* (1702-1761) byl anglický presbyteriánský duchovní a matematik [18]. Obhajoval Newtony fluxe (derivace) proti Berkeleyho filosofické kritice [19]. Bayesův spis o pravděpodobnosti byl vydán až 3 roky po jeho smrti. Bayesovu formuli znovu a nezávisle objevil P. S. Laplace a ve věku 25 ji publikoval ve skvělé studii, která byla podnětná i ve 20. století <http://www.cs.uoi.gr/~galatsanos/LAPLACE.htm>).

Příklad 1. Mějme dvě stejné urny. V urně A_1 je 20 kuliček bílých a 10 černých, v urně A_2 je 10 bílých a 20 černých. Náhodně zvolíme urnu, 4krát z ní vytáhneme kuličku, zaregistrujeme její barvu a vrátíme ji zpět, aby pravděpodobnost výběru zůstávala stejná. Celkem jsme vytáhli 3 bílé a 1 černou kuličku. Tuto událost označme B . Jaká je pravděpodobnost, že zvolená urna je A_1 ?

Pravděpodobnosti volby urn jsou $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$, tedy $P(A_1) + P(A_2) = 1$, pravděpodobnosti vytažení 3 bílých a 1 černé kuličky z urny A_1 a urny je A_2 (binomické rozdělení) jsou

$$P(B|A_1) = \binom{4}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4 \times 2^3}{3^4} = \frac{32}{81}, \quad P(B|A_2) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4 \times 2}{3^4} = \frac{8}{81}.$$

Podle Bayesovy formule

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \times P(A_1)}{P(B|A_1) \times P(A_1) + P(B|A_2) \times P(A_2)} = \frac{\frac{32}{81} \times \frac{1}{2}}{\frac{32}{81} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{81} \times \frac{1}{2}} = \frac{32}{32+8} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

Příklad 2. Dva hráči se střídavě strefují do kuželky. Při prvním hodu má první pravděpodobnost zásahu 0.2, druhý 0.4. S každým dalším hodem se u každého hráče pravděpodobnost zásahu zvětšuje o 0.05. Kuželka spadla při 5. hodu. Jaká je pravděpodobnost, že házet začal 2. hráč?

Začít mohl stejně první i druhý hráč, $P(H_1) = P(H_2) = 0.5$. První 4 pokusy byly neúspěšné. Začal-li první hráč, byla pravděpodobnost zásahu v 5. hodu

$$P(A|H_1) = (1 - 0.2)(1 - 0.4)(1 - 0.25)(1 - 0.45) \cdot 0.3 = 0.8 \times 0.6 \times 0.75 \times 0.55 \times 0.3 = 0.0594,$$

Začal-li druhý hráč, byla pravděpodobnost zásahu v 5. hodu

$$P(A|H_2) = (1 - 0.4)(1 - 0.2)(1 - 0.45)(1 - 0.25) \cdot 0.5 = P(A|H_1) \times 0.5/0.3 = 0.0990.$$

Pravděpodobnost, že začal 2. hráč je tedy

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \times P(A|H_2)}{P(H_1) \times P(A|H_1) + P(H_2) \times P(A|H_2)} = \frac{0.5 \times 0.0990}{0.5 \times 0.0594 + 0.5 \times 0.0990} = \frac{1}{(3/5)+1} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

Další a složitější příklady jsou uvedeny v [16,17].

Přívlastky apriorní a aposteriorní lze přenést také na hustoty náhodných vektorů [20].

Interpretační problémy či pochybnosti mohou vznikat, pokud se z výskytu jevu A dělají korekce pravděpodobností $P(H_k)$, které jako apriorní mohou být zvoleny dost libovolně (viz diskusi v [8], str. 83). Zvýšení věrohodnosti vyžaduje další experimenty a pak se dostáváme do oblasti aplikací standardně definovaných statistických šetření u větších souborů dat [20].

P. S. Laplace použil metody výběru k odhadu počtu obyvatel Francie [22]. Přiměl francouzskou vládu, aby v nevelkém počtu malých administrativních okrsků nařídila sečíst obyvatelstvo ke dni 22. září 1802. Ze známého celkového počtu jejich obyvatel (y) a počtu dětí narozených v předchozím roce v těchto okrscích (x) a v celé Francii (X) (registrace novorozenců byla povinná) odhadl počet obyvatel Francie zlomkem $(\frac{y}{x}X)$. Laplace také odvodil některé vlastnosti tohoto odhadu. Předtím (1786) ověřil tuto metodu stanovením odhadu počtu obyvatel Francie v roce 1782.

Podobnou výběrovou metodou se dá odhadovat počet nějakého druhu zvíře, ryb atd. v obtížně přístupných nebo zcela nepřístupných zónách přírody [7].

Pravděpodobnost a morální vědy

V navázání na Condorcetovy práce se Laplace zabýval aplikací urnového modelu na pravděpodobnost výskytu chybných lidských rozhodnutí v oblastech, jako jsou svědectví nebo soudní verdikty. Laplace vyjádřil určité podmínky platnosti, ale současně zdůrazňoval výhody odhadů na základě pravděpodobnostních úvah. V prvním dodatku *Théorie analytique* počítal aposteriorní pravděpodobnost, že obviněný je skutečně vinen, jestliže každý z n členů soudního senátu má stejnou pravděpodobnost p přisoudit 'vinen', přičemž $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$. Na základě těchto výpočtů Laplace formuloval doporučení o složení senátu a většinovém rozhodnutí, která také publikoval v roce

1816. Laplaceovy argumenty se v letech 1820 a 1830 opakovaně staly předmětem diskusí o systému soudnictví ve Francii. Současně však rostly námitky proti a sílila kritika pravděpodobnostních závěrů v oblasti práva ze strany filosofů a matematiků (Poisson).

(Více : <http://statprob.com/encyclopedia/PierreSimonMarquisDeLAPLACE.html>)

LAPLACEOVA TRANSFORMACE — LETMÝ POHLED

Integrál $F(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx$, kde $s > 0$, konverguje např. pro omezené spojitě funkce,

tj. $|f(x)| \leq M < +\infty$, neboť $\left| \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x)| e^{-sx} dx \leq M \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx \leq M$.

Obecněji: nevlastní integrál $\int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx$ pro komplexní p a všechny komplexní

funkce definované na poloose $(0, +\infty)$ konverguje, je-li $\int_0^A f(x) e^{-px} dx$ konečné

komplexní číslo pro každé $+\infty > A > 0$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $A(\varepsilon)$, že pro jakákoli $L, U > A(\varepsilon)$ je (viz nevlastní integrály [12])

$$\left| \int_L^U f(x) e^{-px} dx \right| < \varepsilon.$$

Pro zjednodušení se požadavky zaručující konvergenci $\int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx$ formulují v silnější (a konkrétnější) formě [22-24]. Např. f je komplexní funkce definovaná a po částech spojitá na $(0, +\infty)$, pro niž existují $M, s > 0$ taková, že pro dostatečně velká x je

$$|f(x)| \leq M e^{-sx}$$

(funkce exponenciálního typu). Pak pro komplexní p , $\operatorname{Re} p \geq s$ existuje

$$Lf = F(p) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx.$$

Množinu všech takto definovaných funkcí f označme E .

Např. pro $\omega > 0$ je $|e^{i\omega x}| = 1$, tedy $e^{i\omega x}$ patří do E a

$$Le^{i\omega x} = \int_0^{+\infty} e^{(i\omega - p)x} dx = \frac{1}{i\omega - p} e^{(i\omega - p)x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p - i\omega} = \frac{p + i\omega}{(p - i\omega)(p + i\omega)} = \frac{p + i\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

V důsledku linearitě integrace je také L lineární operátor (tj. zobrazení, které komplexní funkci f z E přiřazuje komplexní funkci F), přičemž pro libovolná komplexní čísla a, b a libovolné funkce f, g z E platí

$$L(af + bg) = aLf + bLg.$$

Tedy $Le^{ix} = L(\cos \omega x + i \sin \omega x) = L \cos \omega x + i L \sin \omega x = \frac{p}{p^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, tj.

$$L \cos \omega x = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad L \sin \omega x = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Velmi důležitý je výpočet obrazu derivace ($f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$)

$$Lf' = \int_0^{+\infty} f'(x) e^{-px} dx = f(x) e^{-px} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx = pLf - f(0+).$$

Analogicky

$Lf'' = sLf' - f'(0+) = p[pLf - f(0+)] - f'(0+) = p^2Lf - pf(0+) - f'(0+)$
a pro $n > 2$

$$Lf^{(n)} = p^n Lf - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+).$$

Pro integrál funkce z E dostaneme podobně

$$L \int_0^x f(u) du = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x f(u) du \right) e^{-px} dx = -\frac{1}{p} e^{-px} \int_0^x f(u) du \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx$$

První sčítanec na pravé straně se zřejmě anulují (integrál $\int_0^{+\infty} f(u) du$ je konečný), takže

$$L \int_0^x f(u) du = \frac{1}{p} Lf.$$

Operátor L převádí derivování nebo integrování na násobení nebo dělení číslem p .

Ukažme si jednoduchou aplikaci na volných kmitech lineárního oscilátoru, popsaného lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) + c \frac{d}{dt} y(t) + k y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \frac{d}{dt} y(0) = 0$$

(např. lineární pružina charakterizovaná tuhostí k (N/m), koeficientem útlumu c (kg/s), na níž je zavěšeno těleso s hmotností m [25]). Dělením m dostaneme ($\gamma = \frac{c}{2m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$)

$$y''(t) + 2\gamma y'(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \frac{d}{dt} y(0) = 0.$$

V tomto běžném fyzikálním případě jsou výchylky $y(t)$ i jejich derivace zaručeně omezené hladké funkce, takže lze bez problémů použít Laplaceovy transformace:

$$Ly'' + 2\gamma Ly' + \omega^2 Ly = (p^2 Ly - p y_0 - 0) + 2\gamma (p Ly - y_0) + \omega^2 Ly \\ = (p^2 + 2\gamma p + \omega^2) Ly - (p + 2\gamma) y_0 = 0,$$

tj.

$$Ly = \frac{p + 2\gamma}{p^2 + 2\gamma p + \omega^2} y_0.$$

Při zanedbatelném útlumu $c \approx 0$ lze ovšem položit $\gamma = 0$. Pak

$$Ly = y_0 \frac{p}{p^2 + \omega^2} = y_0 L \cos \omega x = L(y_0 \cos \omega x).$$

L je lineární, tedy $L(y - y_0 \cos \omega x) = 0$. Pro funkce z E odtud plyne $y - y_0 \cos \omega x = 0$, tj.

$$y(t) = y_0 \cos \omega x.$$

Z tohoto nástinu je zřejmé, že Laplaceova transformace algebraizuje derivování a tím v mnoha případech usnadňuje řešení diferenciálních rovnic. Toho se bohatě využívá např. ve výpočtech elektrických obvodů [22]. V odkazech [22,24] lze najít také rigoróznější výklad. Obvyklá je také Laplaceova-Carsonova transformace

$$Cf = pF(p) = p \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx.$$

Vlastnosti komplexních funkcí komplexní proměnné $F(p)$, resp. $pF(p)$ (holomorfnost [12] v polorovině $\operatorname{Re} p > s$) a podmínky inverze L , resp. C jsou uvedeny např. v [22-24].

Pro Laplaceovu-Carsonovu transformaci byly sestaveny obsáhlé tabulky korespondence $f \leftrightarrow C f = pF(p)$. Podrobněji:

$$f \text{ a } C f = p \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx \longleftrightarrow C f = pF(p) \text{ a } \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p) e^{pt} dp = f$$

pro $b > s$. Poslední z rovností

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p} C f\right) = L^{-1}(L f) = f$$

se nazývá *Mellinova formule*. [27]. Obecněji lze k inverzi použít reziduové věty teorie funkcí komplexní proměnné [12,22,29].

Vraťme se k výchylce volných kmitů tlumeného lineárního oscilátoru. Podle Mellinovy formule

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} L y e^{pt} dp = y_0 \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{p+2\gamma}{p^2+2\gamma p+\omega^2} e^{pt} dp.$$

Jmenovatel integrandu vpravo je kvadratický polynom s kořeny

$$p_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}, \quad p_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2},$$

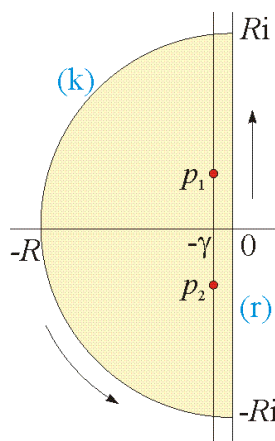
takže jej lze rozložit na součin $(p - p_1)(p - p_2)$.

Integrand $g(p) = \frac{p+2\gamma}{p^2+2\gamma p+\omega^2} e^{pt} = \frac{p+2\gamma}{(p-p_1)(p-p_2)} e^{pt}$ je holomorfní (diferencovatelná) funkce v celé

komplexní rovině s výjimkou bodů p_1, p_2 , v nichž má jednoduché póly [12,22,29]. Rezidua $g(p)$ v těchto bodech jsou [12,22,29]

$$\operatorname{res}_{p_1} g(p) = \frac{p_1+2\gamma}{p_1-p_2} e^{p_1 t} = \frac{\gamma+i\sqrt{\dots}}{2i\sqrt{\dots}} e^{p_1 t}, \quad \operatorname{res}_{p_2} g(p) = \frac{p_2+2\gamma}{p_2-p_1} e^{p_2 t} = \frac{-\gamma+i\sqrt{\dots}}{2i\sqrt{\dots}} e^{p_2 t}.$$

V Mellinově formuli zvolme třeba $b = 0$. Podle reziduové věty je integrál g po uzavřené hranici půlkruhu o poloměru R se středem v počátku (obr. 8) roven $2\pi i$ -násobku součtu reziduí g :



$$\begin{aligned} \int_{(r) \cup (k)} g(p) dp &= 2\pi i [\operatorname{res}_{p_1} g(p) + \operatorname{res}_{p_2} g(p)] \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{2i\sqrt{\dots}} [(\gamma + i\sqrt{\dots}) e^{p_1 t} + (-\gamma + i\sqrt{\dots}) e^{p_2 t}] \right] \\ &= \dots \text{(zdlouhavé úpravy vynecháme)} \\ &= 2\pi i e^{-\gamma t} \left[\frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) + \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \right]. \end{aligned}$$

Integrál po oblouku kružnice (k) je

$$\begin{aligned} \int_{(k)} g(p) dp &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R e^{i\phi} + 2\gamma}{R^2 e^{i\phi} + 2\gamma R e^{i\phi} + \omega^2} e^R e^{i\phi} R e^{i\phi} d\phi \text{ a} \\ \left| \int_{(k)} g(p) dp \right| &\leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left| \frac{R^2 e^{i\phi} + 2\gamma R}{R^2 e^{i\phi} + 2\gamma R e^{i\phi} + \omega^2} \right| \left| e^{Rt(\cos\phi + i\sin\phi)} \right| d\phi. \end{aligned}$$

Obr. 8 – Oblast pro výpočet $y(t)$ zpětnou Laplaceovou transformací.

$$\text{Zřejmě } \left| \frac{R^2 e^{i\phi} + 2\gamma R}{R^2 e^{i\phi} + 2\gamma R e^{i\phi} + \omega^2} \right| \leq M < \infty \text{ a } \left| \frac{\dots}{\dots} \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1.$$

Takže

$$\left| \int_{(k)} g(p) dp \right| \leq M \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |e^{Rt \cos \phi} e^{iRt \sin \phi}| d\phi \leq M \int_0^{\pi} e^{-Rt \sin \phi} d\phi.$$

Podle věty o střední hodnotě [12] existuje θ , $0 < \theta < \pi$, že $M \int_0^{\pi} e^{-Rt \sin \phi} d\phi = M \pi e^{-Rt \sin \theta} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$.

Pak

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(r(R)) \cup (k(R))} g(p) dp &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(r(R))} g(p) dp + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(k(R))} g(p) dp = \int_{-i\infty}^{i\infty} g(p) dp + 0 \\ &= 2\pi i [\operatorname{res}_{p_1} g(p) + \operatorname{res}_{p_2} g(p)] = 2\pi i e^{-\gamma t} \left[\frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) + \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \right]. \end{aligned}$$

Konečně tedy

$$y(t) = y_0 \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} g(p) dp = y_0 e^{-\gamma t} \left[\frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) + \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \right].$$

Derivováním najdeme rychlost a zrychlení

$$\begin{aligned} y'(t) &= -y_0 e^{-\gamma t} \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t), \\ y''(t) &= y_0 e^{-\gamma t} \omega^2 \left[\frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) - \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \right]. \end{aligned}$$

Bývá zvykem vyjadřovat řešení ve fázovém tvaru. V našem případě tedy

$$y(t) = y_0 e^{-\gamma t} c \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \alpha) = y_0 e^{-\gamma t} [\cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) c \cos \alpha - \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) c \sin \alpha].$$

Má pak platit

$$[\cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) c \cos \alpha - \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) c \sin \alpha] = [\cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) + \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t)].$$

Zřejmě

$$c \cos \alpha = 1, \quad c \sin \alpha = -\frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$$

Dělením druhé rovnosti první ($\alpha \neq \pi/2$, $c \neq 0$) dostaneme $\tan \alpha = -\frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$, tedy $\sin \alpha = -\frac{\gamma}{\omega}$. Z první

rovnice pak $c = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2 - \gamma^2}{\omega^2}}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$. Fázový tvar řešení tedy je

$$y(t) = y_0 e^{-\gamma t} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \gamma^2}} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t - \arcsin \frac{\gamma}{\omega}).$$

Zřejmě $y(0) = y_0 \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \gamma^2}} \cos(-\arcsin \frac{\gamma}{\omega}) = y_0 \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \gamma^2}} \sqrt{1 - \sin^2(-\arcsin \frac{\gamma}{\omega})} = y_0 \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \gamma^2}} \sqrt{\frac{\omega^2 - \gamma^2}{\omega^2}} = y_0$,

atd.

U Laplaceovy transformace hraje velmi důležitou roli tzv. Duhamelův integrál [22,24] (Jean-Marie Duhamel (1797–1872))

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t-u) g(u) du.$$

Integrálu $\int_0^t f(t-u) g(u) du$ se říká konvoluce funkcí f a g . Substituce $v = t - u$ dává

$$\int_0^t f(t-u) g(u) du = -\int_t^0 f(v) g(t-v) dv = \int_0^t f(v) g(t-v) dv ,$$

tj. operace konvoluce je komutativní. Derivace konvoluce funkcí f a g se dá označit $f * g$ a nazvat operátorový součin. Dále

$$L(f * g) = pLfLg, \quad \text{resp. } L^{-1}(pLfLg) = f * g.$$

Součin $*$ spolu s lineárními operacemi násobení komplexním číslem a sčítáním vytváří algebraickou strukturu (těleso). Na této důsledně algebraizaci se dá elegantně vytvořit operátorový počet [23].

Laplaceova a Laplaceova-Carsonova transformace jsou příklady tzv. integrálních transformací. Další transformaci, Fourierovu, známe jednak z teorie Fourierových řad a technických aplikací ve frekvenční analýze vibrací, z teorie pravděpodobnosti a aplikací náhodných procesů [7,13,28]. Obecná integrální transformace funkce f se dá zapsat ve tvaru

$$If = F(x) = \int_G K(t, x) f(t) dt ,$$

kde G je obor integrace a K je jádro. Diracův funkcionál δ [7] umožňuje snadný přechod k diskretním transformacím (diskrétní Fourierova transformace, Z -transformace).

Poznámka.

Laplaceovu transformaci popsal Laplace v roce 1812, ale dávno před ním (1737) ji použil již L. Euler k řešení některých obyčejných diferenciálních rovnic.

Zde lze citovat V. I. Arnolda [26]: *Podobně jako Amerika nenese jméno svého objevitele Kolumba, rovněž matematické výsledky téměř nikdy nenesou jméno toho, kdo je objevil.*

Arnoldův princip: *Nese-li nějaký pojem jméno osoby, pak to není jméno jeho objevitele.*

ROZVOJ DETERMINANTU PODLE PRVKŮ SLOUPCE (ŘÁDKU)

Laplaceova obecná věta o rozvoji determinantu se probírá v základním kurzu algebry (např. [30]). Z ní plyne toto speciální tvrzení:

Pro matici $\mathbf{A}_n$ typu $n \times n$ a $1 \leq i \leq n$ je

$$\det \mathbf{A}_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}),$$

kde matice $\mathbf{A}_{ij}$ je typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z matice $\mathbf{A}_n$ vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Objekt

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$$

se nazývá *minor* nebo *algebraický doplněk* příslušný prvku a_{ij} . Pak

$$\det \mathbf{A}_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} D_{ij}.$$

Počítejme např. determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

V EXCELU uložíme matici do pole (A1:E5). V nějaké volné buňce snadno vypočteme

$$D = \text{DETERMINANT}(A1:E5) = 1200.$$

Rozvinutím např. podle 3 sloupce dostaneme

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{1+3} 3 \det \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} 8 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^{3+3} 8 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{4+3} 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^{5+3} 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Těchto pět matic 4×4 se snadno vytvoří zkopírováním původní matice 5×5 , vyškrtnutím 3. sloupce, kompaktifikací pole do matice 5×4 , pětinašobným zkopírováním a postupným mazáním 1. až 5. řádku s posunem řádků do souvislých polí 4×4 . Po výpočtu 5 determinantů a dosazení opět dostaneme

$$D = 3 \times (-520) - 8 \times (-120) + 8 \times 120 - 3 \times 520 + 2 \times 1200 = 1200.$$

Tak bychom mohli pokračovat dál přes rozvoje obecně 5×4 determinantů matic 3×3 , resp. $5 \times 4 \times 3$ determinantů matic 2×2 .

To jistě mělo význam při ručním počítání nebo práci s kapesní kalkulačkou. Kdybychom však měli počítat determinant matice 20×20 pomocí determinantů matic 3×3 , bylo by jich

$$20 \times 19 \times \dots \times 5 \times 4 = \frac{20!}{3!} \approx 4.055 \times 10^{17}$$

– a takový výpočet je nad lidské schopnosti. Musíme proto být vděční lidskému intelektu za existenci dnešních počítačů (PC), notebooků a software. Např. v EXCELU je pak nejpracnější zápis matice a jednou instrukcí dostaneme okamžitě výsledek.

Pro ověření Laplaceova rozvoje determinantu může sloužit např. výpočet hodnoty

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}.$$

Ekvivalentními úpravami (odčítáním řádků $\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k$, $k = 1, \dots, n-1$ a pak sčítáním řádků $\mathbf{r}_{k+1} + \mathbf{r}_k$, $k = 2, \dots, n-1$) dostaneme horní trojúhelníkovou matici (tj. matici se všemi prvky pod hlavní diagonálou rovnými 0)

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2-n & n-1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix}.$$

Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále (rovněž důsledek Laplaceova rozvoje)

$$D_n = (n-1)!$$

Např. $D_{20} = 19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$.

Podobně se dá např. dokázat, že pro matice $n \times n$ s komplexním c platí

$$\det \begin{pmatrix} c & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & c \end{pmatrix} = (c-1+n)(c-1)^{n-1}, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & c & 1 \end{pmatrix} = (1-c)^{n-1},$$

takže třeba pro $c = 2$ dostaneme v prvním případě $n + 1$, v druhém $(-1)^{n-1}$ atd. To lze snadno numericky ověřit v EXCELU.



MECHANIKA

POTENCIÁL

Sílu pole chápeme jako vektor závislý na poloze, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Dá se často vyjádřit jako záporně vzatý gradient skalární funkce polohy $U(\mathbf{r})$, potenciálu,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\tilde{\mathbf{N}}U(\mathbf{r}).$$

Zde $\mathbf{r}$ je polohový vektor ve zvoleném souřadnicovém (referenčním) systému. V obvyklém trojrozměrném prostoru (3D) je $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ (horní index T značí transpozici) a operátor nabra $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$, kde $\mathbf{i}_x = (1, 0, 0)^T$ je jednotkový vektor ve směru osy 0x, atd. Potenciál (potenciální energie) U v bodě $\mathbf{r}$ vzhledem k bodu $\mathbf{r}_0$ je roven práci, nutné k přemístění z bodu $\mathbf{r}_0$ do $\mathbf{r}$ v centrálním silovém poli silou $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ po libovolné spojitě křivce $C(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ s koncovými body $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}$, kde $|\mathbf{r}_0| < |\mathbf{r}|$, tedy

$$U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) = - \int_{C(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

přičemž $\cdot$ značí skalární součin, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = F_x(\mathbf{r}) dx + F_y(\mathbf{r}) dy + F_z(\mathbf{r}) dz$.

Počátek systému souřadnic umístíme do těžiště tělesa o velké hmotnosti M . V bodě $\mathbf{r}$ vně tělesa působí na jednotkovou hmotnost síla $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$, kde G je gravitační konstanta. V bodě $\mathbf{r}$ je

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) &= \int_{C(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})} G \frac{M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} = GM \int_{C(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})} \frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= GM \int_{C(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dy + \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dz \right] \\ &= GM \int_{C(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})} d(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = GM \int_{C(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})} d\left(\frac{1}{r}\right) = -GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \end{aligned}$$

Např. potenciální energie tělesa o hmotnosti m vzhledem k úrovni na povrchu Země s poloměrem r_Z je

$$U(h) = -GMm \left(\frac{1}{r_Z + h} - \frac{1}{r_Z} \right) = -GMm \left(\frac{r_Z - r_Z - h}{(r_Z + h)r_Z} \right) \approx m \frac{GM}{r_Z^2} h = mgh,$$

přičemž $g = \frac{GM}{r_Z^2}$ je gravitační zrychlení. Po dosazení skutečně

$$\frac{GM}{r_Z^2} \approx \frac{6.674 \times 10^{-11} \text{ (m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}) \times 5.974 \times 10^{24} \text{ (kg)}}{(6.373 \times 10^6 \text{ (m)})^2} \approx 9.8 \text{ m/s}^2.$$

Má-li potenciál tvar

$$U(\mathbf{r}) = A + B \frac{1}{r} = A + B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

s konstantami A a B , je

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} = B \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = B \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = B [-x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}],$$

$$\frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} = B \frac{\partial}{\partial x} [-x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] = B [-(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}].$$

Stejným způsobem vypočteme

$$\frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial y^2} = B [-(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3y^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}].$$

$$\frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial z^2} = B [-(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3z^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}].$$

Sčítáním posledních tří rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial z^2} &= B [-3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3(x^2 + y^2 + z^2) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}] \\ &= B [-3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] = 0. \end{aligned}$$

Rovnice

$$\frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial z^2} = 0$$

se nazývá Laplaceova a její levá strana se stručněji zapisuje jako $\Delta U(\mathbf{r})$, kde

$$\Delta = \tilde{\mathbf{N}} \cdot \tilde{\mathbf{N}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

je Laplaceův operátor [31-35] (tento pojem zavedl J. C. MAXWELL 1873 ve své knize *A Treatise on Electricity and Magnetism* (<http://jeff560.tripod.com/l.html>)).

V n -rozměrném euklidovském prostoru se souřadnicemi $x_1, \dots, x_n$ je

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \mathbf{i}_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \Delta = \tilde{\mathbf{N}} \cdot \tilde{\mathbf{N}} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

a pro stejný tvar funkce

$$u(\mathbf{r}) = a + \frac{b}{|\mathbf{r}|} = a + \frac{b}{r(x_1, \dots, x_n)} = a + \frac{b}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial x_k} = b \frac{\partial}{\partial x_k} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} = -b x_k (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-3/2} = -b r^{-3} x_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r})}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k} [-b r^{-3} x_k] = b [-r^{-3} + 3 r^{-4} r^{-1} x_k^2] = b r^{-3} [-1 + 3 r^{-2} x_k^2],$$

ale

$$\Delta u(\mathbf{r}) = b r^{-3} \sum_{k=1}^n [-1 + 3 r^{-2} x_k^2] = b r^{-3} (-n + 3) \begin{cases} = 0 & \text{pro } n = 3 \\ \neq 0 & \text{pro } n \neq 3 \end{cases}.$$

Funkce u splňuje Laplaceovu rovnici právě jen pro $n = 3$, tedy v $\mathbb{R}^3$ (3D).

Pro $n > 3$ zkusíme řešení hledat ve tvaru

$$u_n(\mathbf{r}) = a + b \frac{1}{|\mathbf{r}|^{n-2}} = a + b r^{-n+2} = a + b (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{2-n}.$$

Protože $\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r}$, je

$$\frac{\partial u_n(\mathbf{r})}{\partial x_k} = b(2-n)r^{-n+1} \frac{\partial r}{\partial x_k} = b(2-n)r^{-n+1} \frac{x_k}{r} = b(2-n)r^{-n} x_k,$$

$$\frac{\partial^2 u_n(\mathbf{r})}{\partial x_k^2} = b(2-n) \left[-n r^{-n-1} \frac{x_k}{r} x_k + r^{-n} \right]$$

a

$$\Delta u_n(\mathbf{r}) = b(2-n) \left[-n r^{-n-2} \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n r^{-n} \right] = b(2-n) [-n r^{-n} + n r^{-n}] = 0.$$

Funkce $u_n(\mathbf{r}) = a + br^{-n+2}$ je tedy řešením Laplaceovy rovnice v $\mathbb{R}^n$.

V rovině $\mathbb{R}^2 = (0x_1x_2)$ splňuje Laplaceovu rovnici funkce ($b > 0$)

$$u(\mathbf{r}) = a + \ln \frac{b}{|\mathbf{r}|} = c - \ln r$$

(logaritmický potenciál). Je totiž $|\mathbf{r}| = r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r}$ pro $k = 1, 2$ a dále

$$\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (-\ln r) = -\frac{1}{r} \frac{x_k}{r} = -\frac{x_k}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r})}{\partial x_k^2} = -\frac{\partial}{\partial x_k} (x_k r^{-2}) = -r^{-2} + 2r^{-3} \frac{x_k^2}{r} = -r^{-2} + 2r^{-4} x_k^2,$$

$$\Delta u(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^2 (-r^{-2} + 2r^{-4} x_k^2) = -2r^{-2} + 2r^{-4} \sum_{k=1}^2 x_k^2 = -2r^{-2} + 2r^{-4+2} = 0.$$

V nejjednodušším případě v jedné dimenzi $\mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$ má Laplaceova rovnice tvar

$$\Delta u(\mathbf{r}) = \frac{d^2}{dx^2} u(r) = 0.$$

Jejím řešením je lineární funkce $u(r) = ar + b$ s konstantami a, b .

Uvedené příklady ukazují, že tvar řešení Laplaceovy rovnice závisí na dimenzi prostoru. Také vyjádření Laplaceova operátoru samozřejmě závisí na použitém systému souřadnic. Vzhledem k různým typům symetrie se např. v rovině často používají polární souřadnice, v trojrozměrném prostoru cylindrický nebo sférický systém souřadnic. Např. v polárních souřadnicích r, ϕ v rovině $\mathbb{R}^2$ má Laplaceův operátor tvar

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

v cylindrických r, ϕ, z v $\mathbb{R}^3$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Vyjádření Laplaceova operátoru v obecných křivočarých souřadnicích v prostoru libovolné dimenze lze najít např. v [31,33,34], ve 3D také v [32].

Hledejme např. řešení Laplaceovy rovnice v polárních souřadnicích, tedy pro $n = 2$. Zvolme je ve tvaru se separovanými proměnnými (Fourierovu metodu)

$$u(r, \phi) = R(r) \Phi(\phi).$$

Po dosazení

$$\Delta u(r, \phi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, \phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} u(r, \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r, \phi) = \frac{d^2}{dr^2} R \Phi + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} R \Phi = 0.$$

Poslední rovnici vynásobíme r^2 , vydělíme $R(r) \Phi(\phi) \neq 0$ a upravíme na

$$\left(r \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{d}{dr} R\right) \frac{r}{R} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} R\right] \frac{r}{R} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = 0.$$

První sčítanec závisí jen na r , druhý jen na ϕ a oba sčítanci jsou nezávislé funkce. Položme je tedy = 0,

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} R\right] \frac{r}{R} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = 0.$$

Z první rovnice ($r > 0, R \neq 0$) plyne $\frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} R\right] = 0$, tj. $r \frac{d}{dr} R = A = \text{const}$ a $\frac{d}{dr} R = \frac{A}{r}$, tj. $R = A \ln r + B$.

Z druhé rovnice ($\Phi \neq 0$) plyne $\frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = 0$, tj. $\Phi = C\phi + D$, $C, D = \text{const}$. Znovu jsme tak dospěli k logaritmickému potenciálu R .

Poznámka. Funkce f, g definované na stejné množině jsou závislé, je-li jejich Wronskián roven nule,

$$\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = -(f'g - fg') = -g^2 \left(\frac{f}{g}\right)' = 0,$$

tj. $\frac{f}{g} = c = \text{const}$, čili $f = cg$. Slovy: jedna funkce je násobkem druhé.

Laplaceova rovnice je parciální diferenciální rovnice eliptického typu se stejnými koeficienty [32-35]. Funkcím splňujícím Laplaceovu rovnici se říká harmonické funkce. Teorie těchto funkcí je součástí matematické teorie potenciálu.

Poznámka. K Laplaceově rovnici

$$\Delta U(\mathbf{r}) = 0$$

dospěl už *L. Euler* v hydrodynamice při analýze potenciálového proudění, ale Laplace ji zpracoval důkladně i numericky.

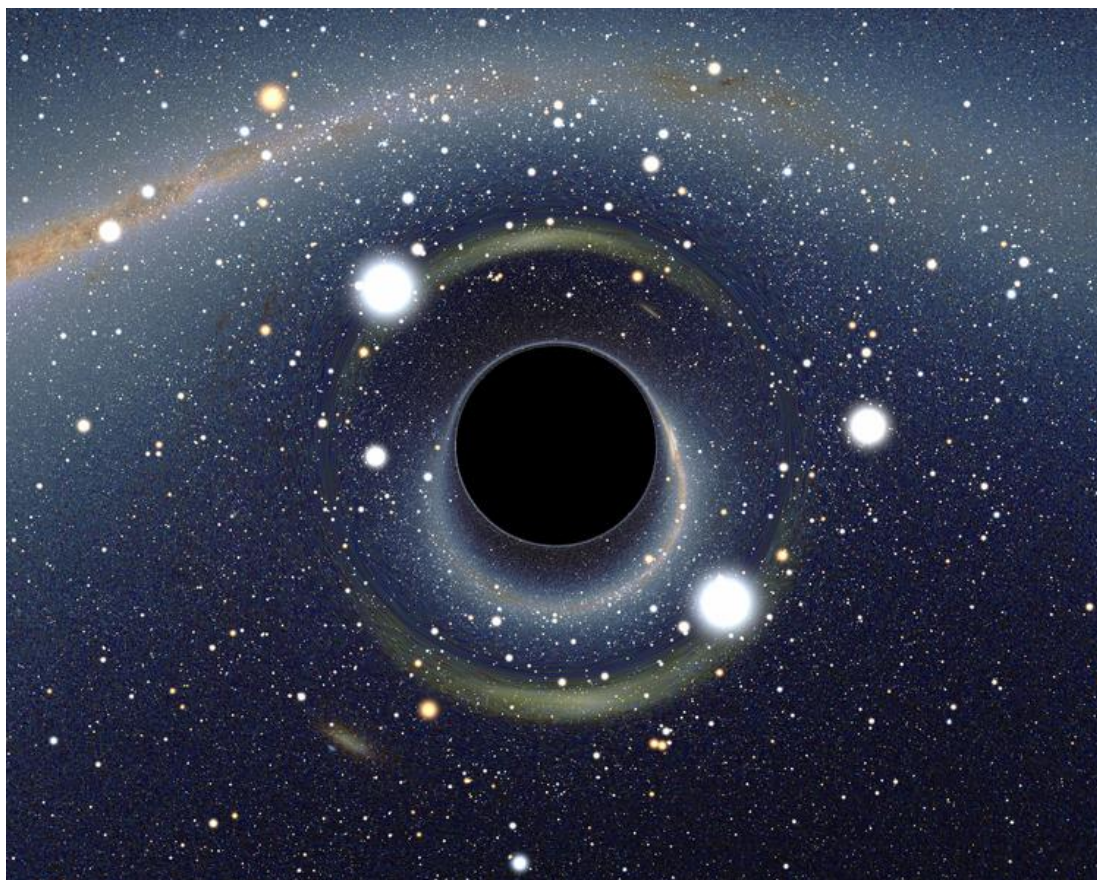
Poznámka. Laplaceova *Mécanique Céleste* je v podstatě převedení Newtonova geometrického výkladu mechaniky do formy založené na analýze. Newton, vědec věřící ve všudypřítomného Boha, předpokládal, že pro udržení stability vesmíru jsou nutné periodické zásahy Boha. Napoleon prý *Mécanique Céleste* opravdu pročetl a pak se zeptal Laplacea, proč v ní o Bohu není ani zmínka. Laplace odpověděl, že tato speciální hypotéza nebyla nutná.

Napoleon, velmi pobaven, opakoval tuto odpověď Lagrangeovi. Ten zvolal: “*Ah! c'est une belle hypothèse; ça explique beaucoup de choses* (Ach, to je pěkná hypotéza, ta vysvětluje mnoho věcí).”

Laplace uvažoval i o tělese s tak velkou hmotností, že by jeho gravitace nedovolila ani vyzařování světla, tedy o objektu, kterému se na návrh J. A. Wheelera (1911-2008) začalo říkat černá díra (black hole) [36,37]. První predikci takového objektu jako gravitační singularity udělal Karl Schwarzschild (1873–1916) velmi brzy po publikaci obecné teorie relativity koncem roku 1915 (http://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Schwarzschild).

O existenci těchto objektů, které se dříve považovaly za čistě spekulativní, se dnes už nepochybuje a lze jimi vysvětlit pozorovatelné jevy [37-38]. Pojmy jako gravitační kolaps, gravitační singularita atd. zdomácněly. Jedna obrovská černá díra se jako

gravitační jádro nachází ve středu naší galaxie. Tomu nasvědčují dráhy hvězd obíhajících kolem společného ohniska, v němž musí být velmi hmotný objekt.



Obr. 9 – Simulovaný pohled na černou díru před Velkým Magellanovým mrakem (nejjasnější galaxií viditelnou z naší galaxie). Převzato z [36].

Laplace také vyslovil domněnku, že některé soustavy hvězd pozorované teleskopy asi nejsou součástí Mléčné dráhy a jsou samostatnými galaxiemi. Tak o 100 let dříve předvídala největší objev Edwina Hubblea (1889–1953) – existenci jiných galaxií. Hvězdy v mlhovinách se vyznačují rudým posuvem ve svém spektru záření. Frekvenční posuv světla závisí podle Dopplerova principu [40] na relativní rychlosti zdroje vzhledem k pozorovateli. Ta roste lineárně se vzdáleností hvězd [41].

LAPLACEŮV DÉMON

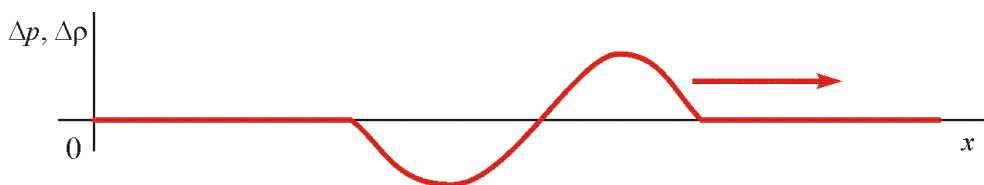
Laplace položil základy teorie pravděpodobnosti důsledně založené na algebře a matematické analýze a vždy si velmi dobře uvědomoval náhodnost v událostech reálného světa. Navzdory jeho přesvědčení se jakoby naschvál spojuje s jeho jménem striktní determinismus: kdyby existovala bytost nebo zařízení (démon) s tak ohromnými schopnostmi, že by v daný okamžik byla schopna obsáhnout přesné polohy a rychlosti všech hmotných částic, pak by tato bytost nebo zařízení mohla na základě rovnic

mechaniky předpovědět polohy a rychlosti všech těchto částic v kterémkoli budoucím (nebo minulém) okamžiku. Tím by zmizela neurčitost a děje reálného světa by se staly plně deterministické. Svět by pak běžel jako přesný vesmírný stroj (viz také [2, 3, 42]).

To, že výsledky některých přírodních dějů jsou předvídatelné jen s nějakou pravděpodobností, ukazuje kvantová mechanika nebo turbulence. V matematice se jako modely chaotičnosti objevily podivné atraktory. O stochastičnosti, chaosu a podivných atraktorech lze najít spoustu informací a ilustrací na internetu. Třeba [43].

RYCHLOST ŠÍŘENÍ ZVUKU

První matematické pojednání o zvuku napsal *I. Newton* ve svých *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) [19]. Odvození rychlosti zvukových vln v tekutině, tedy z Eulerovy rovnice [4, 31], lze najít v [31, str. 440]. Newton určitě vycházel z jednodušší představy. Rovinná vlna šířící se podél kladného směru osy $0x$ znamená zhuštění a zředění molekul plynu v objemové jednotce (obr. 9). Takový děj může nastat jen při kladné hustotě plynu. Je tedy zřejmé, že ve vakuu se zvuk šířit nemůže.



Obr. 10 – Šíření tlakové vlny ve vzduchu.

Rychlost šíření podélných vln, tedy i zvuku, ve hmotném kontinuu je [44]

$$c_l = \sqrt{\frac{K + 4G/3}{\rho}},$$

kde K je objemový modul a G je smykový modul. Rychlost šíření příčných vln je

$$c_{tr} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Rozdílnost rychlostí podélných a příčných (smykových) vln je např. známa z geologie a seismologie. V tekutinách je $G = 0$, proto rychlost šíření zvuku vychází

$$c = c_l = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

kde objemový modul $K = -V \frac{\partial p}{\partial V}$ je změna tlaku nutná k malé relativní redukci objemu.

Newton předpokládal, že kmity vzduchu při šíření zvuku jsou izotermické, kdy pro každou pevnou hmotnost vzduchu platí Boyleův zákon, $pV = p_0V_0$. Pak $p = p_0V_0/V$ a $\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{p_0V_0}{V^2}$. Při malých změnách objemu je $\frac{V_0}{V} \approx 1$, takže

$$K = -V \frac{p_0V_0}{-V^2} \approx p_0.$$

V plynech je tedy objemový modul roven tlaku. Na zemském povrchu je v důsledku gravitace tlak vzduchu přibližně $p_0 \approx 100 \text{ kPa} = 10^5 \text{ Pa}$ a hustota $\rho_0 \approx 1.2 \text{ kgm}^{-3}$. Pak

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \approx \sqrt{\frac{10^5}{1.2}} \approx 289 \text{ m/s}.$$

Tato hodnota c je však příliš nízká ve srovnání z empirickou. Euler a Lagrange se pokoušeli tuto nesrovnalost odstranit, ale neuspěli.

Teprve Laplace si uvědomil, možná díky svému úsilí o chápání podstaty přírodních dějů a těsné spolupráci s fyziky i chemiky, že kmity vzduchu při šíření zvuku jsou tak rychlé, že se lokální změny teploty při tlakových kmitech nestíhají vyrovnávat s okolím. Akustické kmity jsou tedy adiabatické a popsány vztahem [44-46]

$$pV^\kappa = p_0V_0^\kappa,$$

kde κ se nazývá adiabatický index nebo Poissonova adiabatická konstanta [31]. Pro jednoatomové plyny je $\kappa = 5/3$, pro vzduch a dvouatomové plyny je $\kappa = 7/5 = 1.4$. Pak

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V} = -V \frac{\partial}{\partial V} (p_0V_0^\kappa V^{-\kappa}) = -V p_0V_0^\kappa \frac{\partial}{\partial V} (V^{-\kappa}) = \kappa p_0V_0^\kappa V^{-\kappa} \approx \kappa p_0$$

a

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \approx \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}}.$$

U dvouatomového plynu je $c \approx \sqrt{1.4 \frac{10^5}{1.2}} \approx 341.6 \text{ m/s}$ a tato hodnota odpovídá rychlosti

šíření zvuku ve vzduchu – směsi dvouatomových plynů.

Výpočet c lze převést na mol plynu [44,45]

$$c = \sqrt{\kappa \frac{R_m}{M_m} T},$$

kde $R_m = 8.314 \text{ J/(K mol)}$ je univerzální plynová konstanta, T absolutní teplota (K), M_m je hmotnost molu plynu v kg. Pro vzduch jako směs plynů vychází $M_m = 0.0289 \text{ kg/mol}$. Položíme-li $R = R_m/M_m$, dostaneme $R_{\text{vzduch}} = 287.057 \text{ K}^{-1}$. Podobně $R_{\text{dusík}} = R_m/0.028 = 296.95 \text{ K}^{-1}$, $R_{\text{kyslík}} = R_m/0.032 = 259.83 \text{ K}^{-1}$, $R_{\text{vodík}} = R_m/0.002 = 4157.24 \text{ K}^{-1}$, a rychlosti zvuku při $25^\circ\text{C} = 298 \text{ K}$ jsou

$$c_{\text{vzduch}} \approx \sqrt{1.4 \times 287.057 [\text{J}/(\text{Kkg})] \times 298 [\text{K}]} \approx 346 \text{ m/s},$$

$$c_{\text{dusík}} \approx \sqrt{1.4 \times 296.95 \times 298} \approx 352 \text{ m/s},$$

$$c_{\text{kyslík}} \approx \sqrt{1.4 \times 259.93 \times 298} \approx 329 \text{ m/s}.$$

$$c_{\text{vodík}} \approx \sqrt{1.4 \times 4157.24 \times 298} \approx 1\,317 \text{ m/s}.$$

Protože pro reálné plyny stavová rovnice platí jen přibližně, mohou být uvedené vzorce a rychlosti také jen přibližné. V meteorologii hraje důležitou roli relativní vlhkost atmosféry, ve vzduchu bývají téměř vždy molekuly vody. Obecně plyny při nízkých teplotách kapalní a tuhnou, pak ovšem je rychlost šíření podélných vln v nich vyjádřena jinými vzorci.

Např. u vody je $\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3$ a voda se považuje za prakticky nestlačitelnou. Rychlost zvuku ve vodě je však konečná, $c \approx 1500 \text{ m/s}$ (poprvé ji změřili Daniel *Colladon* a Charles *Sturm* v roce 1826 na Ženevském jezeře), proto i objemový modul vody je sice velký, $K = \rho c^2 \approx 2.2 \text{ GPa}$, ale je konečný.

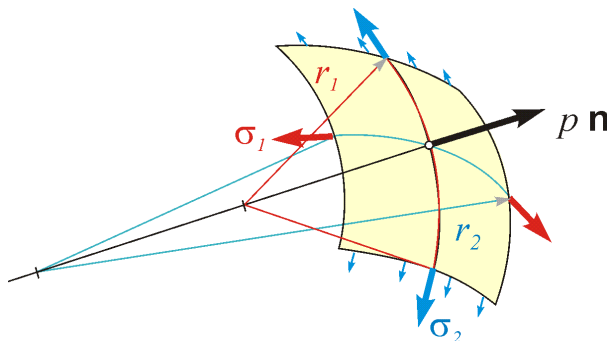
Leonardo da Vinci si již r. 1490 poznamenal: “Když zastavíte svou loď a jeden konec dlouhé trubky ponoříte do vody a druhý si dáte k uchu, uslyšíte lodi plující ve velké vzdálenosti od vás.” *Leonarda* bychom tedy měli pokládat za předchůdce hydroakustiky [47]. Skutečně po něm zůstal soubor poznámek na téma ‘O pohybu a měření vody’ [48].



Obr. 11 – Letadlo F/A-18 letící nadzvukovou rychlostí. Bílá sférická clona je tvořena kondenzovanými kapičkami vody vzniklými náhlým poklesem tlaku a teploty za čelem rázové vlny u letadla [44,45].

LAPLACEOVA ROVNICE PRO MEMBRÁNY, KAPILARITA

Vnitřní přetlak v tlakové nádobě vyvolává v její stěně napětí. Je-li tloušťka stěny vzhledem velikosti nádoby malá, můžeme stěnu redukovat na plochu. Jak se dokazuje v diferenciální geometrii, křivost elementu plochy nabývá maxima a minima ve vzájemně kolmých směrech. To jsou směry hlavních napětí ve stěně (obr. 12).



Obr. 12 – Plošný element membrány (plochy) zatížené přetlakem p .

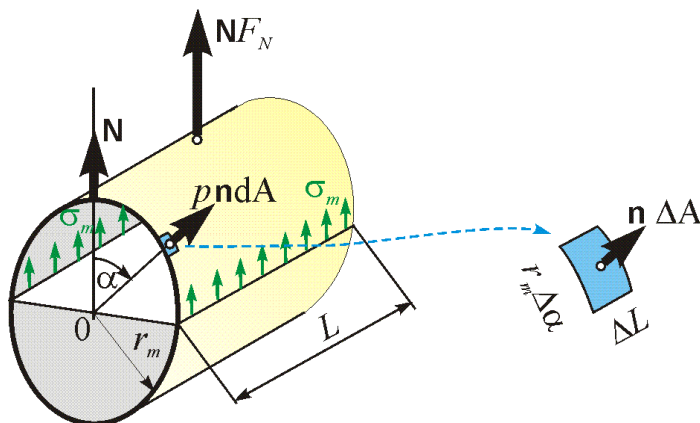
Pro maximální zjednodušení uvažujme nejprve napětí σ_m v kruhovém válci (tenkostěnné hadici) o poloměru r_m kolmé na povrchové přímky (obr. 13). Síla, která působí na rovinu procházející osou válce je rovna průmětu tlaku do této roviny. Úhel mezi normálou $\mathbf{N}$ a normálou válcové plochy $\mathbf{n}$ označme α . Složka tlakové síly ve směru $\mathbf{N}$ působící na element plochy délky ΔL je (obr. 13)

$$F_N = \int_A p \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} dA = p \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha \Delta L r_m d\alpha = p \Delta L r_m \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = p L r_m \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2p \Delta L r_m$$

Jejím dělením celkovou délkou namáhaného průřezu dostaneme meridiánové napětí

$$\sigma_m = \frac{F_N}{2\Delta L} = \frac{2p\Delta L r_m}{2\Delta L} = p r_m.$$

Jeho rozměr je $[\sigma_m] = [p r_m] = \text{Nm}^{-2}\text{m} = \text{Nm}^{-1}$, neboť tloušťku stěny neuvažujeme.



Obr. 13 – Cylindrická membrána (plocha) zatížená přetlakem p a její plošný element.

U regulární plochy [12] (hladké plochy bez hrotů a zlomů) lze plošný element v jejím bodě aproximovat dvěma plošnými elementy vzájemně kolmých oskulačních válcových ploch, jejichž poloměry r_1 , r_2 jsou rovny převráceným hodnotám hlavních křivosti v tomto bodě. Těm odpovídá rozklad tlaku na příspěvky napětí v obou hlavních směrech plochy, $p = p_1 + p_2$. Platí tedy

Laplaceova rovnice

$$p = \frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2}.$$

Laplaceova rovnice našla uplatnění nejen ve výpočtech vyloženě tenkostěnných objektů, ale vycházely z ní např. také první seriózní výpočty pevnosti pneumatik.

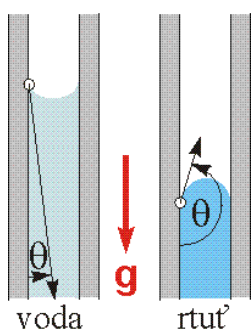
U kulové plochy jsou oba poloměry křivosti stejné, $r_1 = r_2 = r$, proto platí

$$p = 2 \frac{\sigma}{r}.$$

Této redukované varianty se používá např. v medicíně při úvahách o namáhání myokardu ($\sigma = pr/2$, přičemž s respektováním tloušťky stěny h je $\sigma = pr/(2h)$, rozměr Pa) nebo válcové varianty $\sigma = pr$, resp. $\sigma = pr/h$ u stěn tepen, vlasečnic atd.

Laplace ji použil při analýze povrchového napětí kapalin. Celý život věřil v korpuskulární stavbu hmoty i světla a vlnovou teorii světla neuznával. Vzájemné přitahování molekul či atomů kapalin kohezními silami se navenek jeví jako působení vnějšího tlaku, který nutí kapalinu zaujmout minimální objem. Volné kapky vody by proto měly kulový tvar (kapičky rosy na trávě nebo pavučinách, krásné snímky [49]), kdyby na ně nepůsobily vnější síly (tíže, odpor prostředí při pohybu). Se sférickým tvarem kapek rtuti se setkal každý, kdo rozbil rtuťový teploměr nebo rozlil rtuť.

V kapalině je hydrostatický tlak v gravitačním poli Země $p = \rho gh$, kde ρ je hustota kapaliny, g je gravitační zrychlení a h je výška vodního sloupce (hloubka pod hladinou). U skleněné trubice s vnitřním průměrem $d = 2r$ naplněné vodou s povrchovým napětím



$\sigma = 0.072 \text{ N/m}$ při 25°C [50-53] a úhlem smáčení $\theta \approx 0^\circ$ mezi tečnou k meridiánu povrchu v bodě kontaktu se stěnou a gravitačním zrychlením $\mathbf{g}$ (obr. 14), dostaneme $\rho gh = 4\sigma/d$, tj. zdvih či pokles hladiny (elevaci či depresi)

$$h = \frac{4\sigma \cos \theta}{\rho g} \frac{1}{d} \approx \frac{4 \times 72 \times 10^{-3} \times 1}{10^3 \times 9.8} \frac{1}{d} \approx 2.9388 \times 10^{-7} \frac{1}{d}.$$

Pro $d = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ je tedy $h = 2.9388 \times 10^{-4} \text{ m} \approx 0.3 \text{ mm}$, ale pro $d = 0.01 \mu\text{m} = 10^{-8} \text{ m}$ je $h \approx 2.9388 \times 10 \text{ m} \approx 29 \text{ m}$.

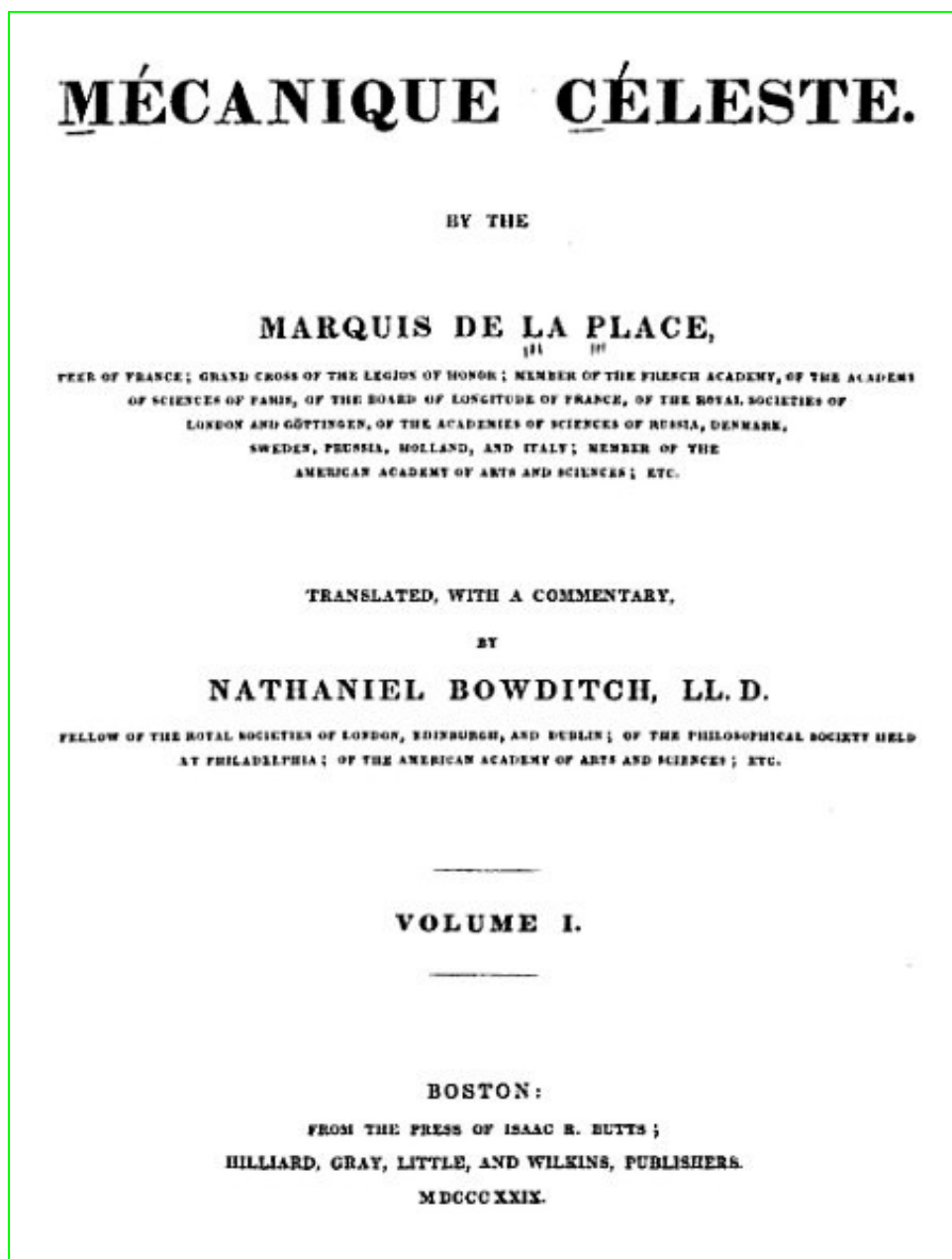
Obr. 14 – Úhel smáčení.

Kapiláry s průměrem řádu nanometrů ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) mezi buňkami ve struktuře stromů přivádějí vodu z kořenů do výšky větví desítek až stovek metrů (sekvoje). Kapilární transport vody porézními materiály, jako jsou cihly nebo omítka, může naopak působit velké nepříjemnosti.

NEBESKÁ MECHANIKA

Laplaceovy práce z nebeské mechaniky napsané během prakticky celého života tvoří monumentální několikasvazkové dílo *Mécanique céleste*. První 2 svazky vyšly 1799, pátý svazek ve třech částech 1823–1825. Francouzská verze měla 5 svazků. Laplaceova *Mécanique* se významem řadí hned za Newtonova Principia.

Anglický překlad vyšel ve 4 svazcích v Bostonu 1829. Zde je reprodukce titulní stránky:



NEBESKÁ MECHANIKA

P. S. markýz de Laplace

- Kniha 1. O obecných zákonech rovnováhy a pohybu.
 Kniha 2. O zákonu všeobecné gravitace a pohybech těžišť nebeských těles.
 Kniha 3. O tvarech nebeských těles.
 Kniha 4. O oscilacích moře a atmosféry.
 Kniha 5. O pohybech nebeských těles kolem jejich vlastních těžišť.
 Kniha 6. Teorie pohybu planet.
 Kniha 7. Teorie Měsíce. Dodatek prezentovaný autorem u Komise pro délky, 17. 8. 1808.
 Kniha 8. Teorie satelitů Jupitera, Saturnu a Uranu.
 Kniha 9. Teorie komet.
 Kniha 10. O několika tématech v systému světa. Doplněk: O kapilárních jevech a doplněk k teorii kapilárních jevů.

Nemám tolik píce ani času, které by bylo nutné věnovat pátrání po Laplaceových pracích a jejich studiu. Uvádím jen – s omluvou a rizikem omylu – vlastní jednoduchý a laický přístup k výpočtům tvarů a pohybů kosmických těles s aplikací jedné numerické metody.

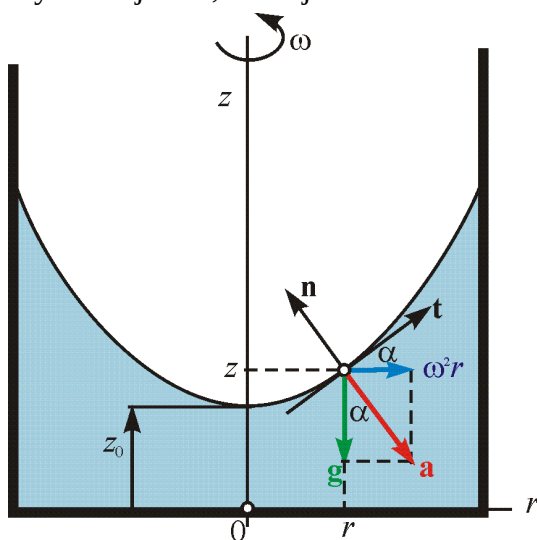
•

MERIDIÁN POVRCHU ROTUJÍCÍ KAPALINY

Základní vlastností kapalin je, že jejich povrch v rovnováze je vždycky kolmý k výslednici působících sil. Např. na Zemi je volný povrch vody v klidu kolmý k tíhovému zrychlení.

Kapalina v rotující nádobě na povrchu Země

Předpokládáme, že tíhové zrychlení je konstantní a označíme je jednoduše g . Odstředivé zrychlení je $\omega^2 r$, kde r je vzdálenost bodu hladiny od osy rotace. Řez kapalinou rotující



Obr. 15 – Hladina rotující kapaliny.

v důsledku třeba jen nepatrné viskozity zároveň s válcovou nádobou znázorňuje obr. 15.

Normála $\mathbf{n}$ má opačný směr než součet tíhového a odstředivého zrychlení

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + \omega^2 \mathbf{r}.$$

Tečna $\mathbf{t}$ k meridiánu hladiny $z(r)$ svírá s horizontální rovinou (s osou Or) stejný úhel α jako normála $\mathbf{n}$ s osou rotace z . Směrnice tečny $\mathbf{t}$ je rovna derivaci

$$\frac{d}{dr} z(r) = \tan \alpha = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

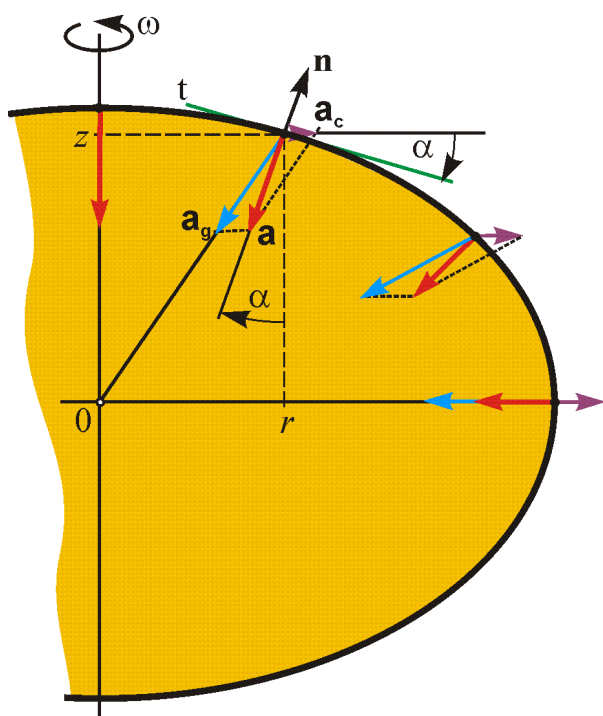
Řešením této rovnice je parabola

$$z(r) = z(0) + \frac{\omega^2}{2g} r^2 .$$

Rovnovážná hladina rotující kapaliny vytváří tedy rotační paraboloid. Jak známo, tato kvadratická plocha soustřeďuje svazek odražených světelných paprsků, rovnoběžných s osou rotace, do ohniska. Tuhnutí rotující taveniny skla nebo kovů lze v principu využít k výrobě parabolických zrcadel, např. pro Newtonovy dalekohledy.

Model rotujícího tvárného tělesa.

Uvažujme rotující objekt složený z volně pohyblivých částic, na který působí tak malé vnější síly, že je lze zanedbat. Jediná síla, která drží objekt pohromadě, je gravitace. Jak to schematicky naznačuje obr. 16, odstředivé zrychlení účinek gravitace zeslabuje.



Obr. 16 – Meridián rotujícího tvárného objektu.

Stejnou úvahou jako v případě kapaliny ve válci lze z obr. 16 odvodit, že za uvedených předpokladů je úhel α mezi tečnou k meridiánu povrchu $z(r)$ a osou $0r$ roven úhlu, který svírá vektor výsledného zrychlení $\mathbf{a}$ se směrem osy $0z$. Pak vektor zrychlení

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_c = \begin{pmatrix} \frac{-GM}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} r + \omega^2 r \\ \frac{-GM}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} z \end{pmatrix}.$$

Dále tedy

Předpokládejme, že objekt tvoří *homogenní nestlačitelná* kapalina a že gravitace působí na povrchu jednoduše tak, jakoby celková hmotnost M byla soustředěna v těžišti $(0, 0)$.

Gravitační zrychlení hmotného elementu v bodě (r, z) povrchu pak je

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_g &= -\frac{GM}{r^2 + z^2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{GM}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ m}^3$ je gravitační konstanta.

Vektor odstředivého zrychlení je

$$\mathbf{a}_c = \omega^2 \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{d}{dr} z(r) = \tan \alpha = -\frac{a_r}{a_z} = -\frac{\left(\frac{-GM}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \omega^2 \right) r}{\frac{-GM}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} z} = \left(\frac{\omega^2}{GM} (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \frac{r}{z}. \quad (R)$$

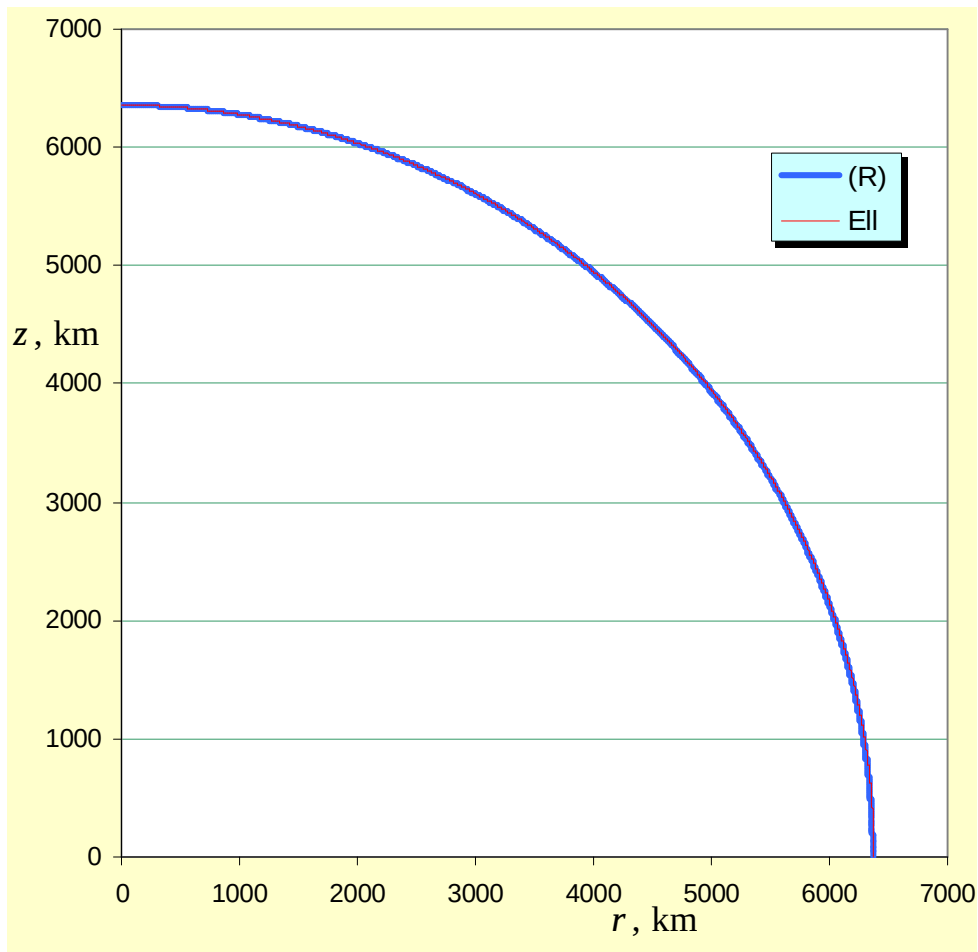
Pravá strana této diferenciální rovnice je nelineární funkcí r a z . Nevím, zda se rovnice dá řešit analyticky substitucemi a elementárními úpravami. V každém případě se však dá řešit numericky. Výsledek ukážeme na několika příkladech.

Uvažujme Zemi jako homogenní tekuté těleso rotující kolem osy procházející póly. Země jako kosmický objekt stadiem plasticity kdysi dávno asi prošla. Vezměme

hmotnost Země $M \approx 5.9736 \times 10^{24}$ kg [54],

dobu otáčky $T \approx 23^h 56^m 4.1^s = 86\,164.1$ s, tedy $\omega \approx \frac{2\pi}{T} \approx 7.292115 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

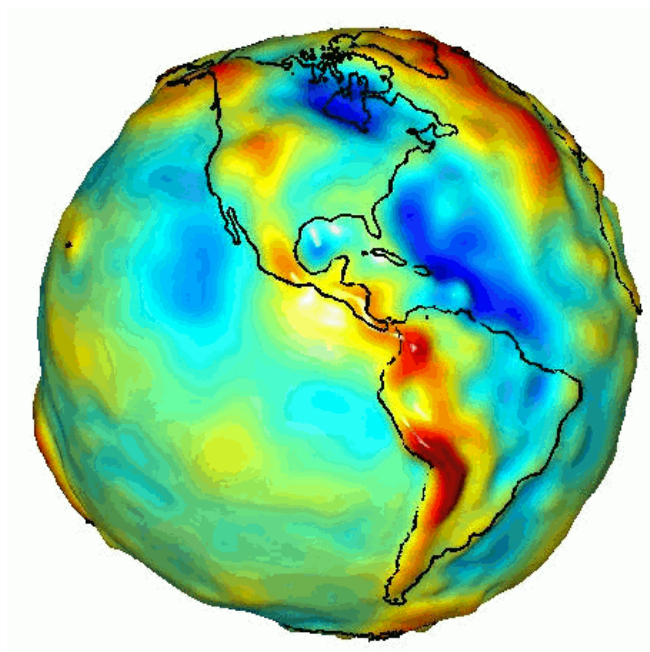
Řešení rovnice (R) s těmito parametry (v DELPHI, Fehlbergova metoda [13]) s počáteční podmínkou $z(0) = 6356.75$ km a krokem $h = 0.025$ km je znázorněno na obr. 17. Poloměr rovníku vypočtený řešením rovnice $z(r) = 0$ je $r_e = 6\,367.93$ km.



Obr. 17 – Řešení rovnice (R) pro parametry Země a elipsa Ell s hlavní poloosou rovnou poloměru rovníku a vedlejší poloosou rovnou polovině vzdálenosti pólů $z(0) = 6356.75$ km.

Je vidět, že relativní rozdíly mezi křivkou $z(r)$, kružnicí o poloměru $b = z(0)$, elipsou s hlavní poloosou $a = 6378.1$ km rovnou poloměru rovníku a vedlejší poloosou $z(0)$, a kružnicí o poloměru a jsou velmi malé. Udávané zploštění Země, $1 - \frac{b}{a} = 0.00335$, je větší než vypočtené, $1 - \frac{6\,356.75}{6\,367.93} \approx 0.00176$.

Model homogenní kapaliny tedy vystihuje jen málo přes 50% zploštění Země. Různé internetové stránky, např. [55], ukazují, že detailní tvar Země je hodně nepravidelný. Příčin je mnoho: nehomogenita Země, koncentrace hmoty s vyšší hustotou ve středu Země vlivem gravitace, tepelné proudění tekuté fáze nitra, nerovnoměrnost deformací při tuhnutí tekuté fáze, apod. Udávané gravitační zrychlení na pólech, $g_p = 9.8322 \text{ ms}^{-2}$, a na rovníku, $g_e = g_t + \omega^2 a = 9.8144 \text{ ms}^{-2}$, (obr. 16) vede k ještě menšímu odhadu zploštění Země: $1 - (g_e/g_p)^{1/2} = 0.0009056$!



Obr. 18 – Nepravidelný tvar Země podle dat z družic projektu GRACE [55] ve zveličeném zobrazení.

Z tabulky průměrných hustot planet vpravo (odkazy [52, 54-64]) je zřejmé, že Země má ze všech planet nejvyšší hustotu.

Relace (R) vyjadřuje fakt, že odchylka od sférického tvaru

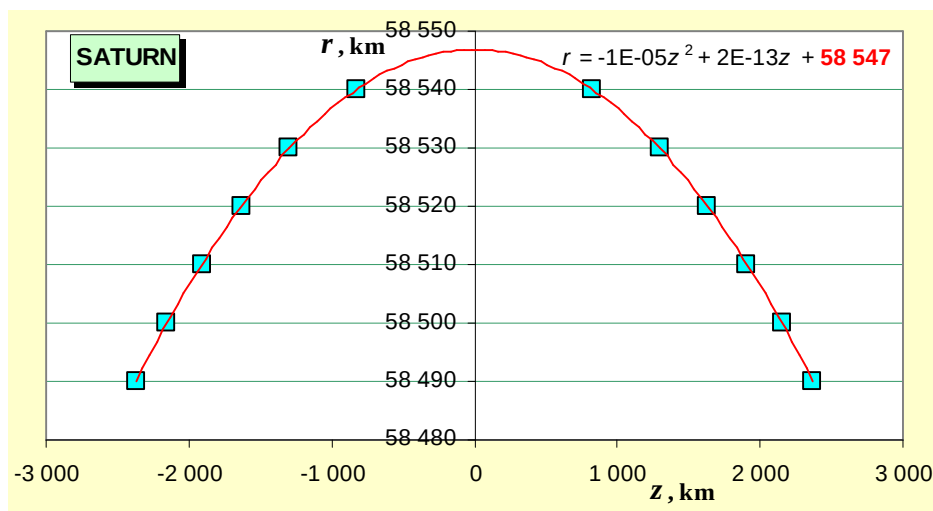
- s rostoucí hmotností tělesa M klesá a
- se čtvercem ω^2 úhlové rychlosti rotace roste.

Planeta	Hustota, kg/m^3	Doba otáčky, s
Merkur	5 427	5 067 075
Venuše	5 204	20 996 928
Země	5 515	86 164
Mars	3 934	88 643
Jupiter	1 326	35 730
Saturn	687	37 955
Uran	1 270	62 064
Neptun	1 638	57 996

Zploštění Merkuru a Venuše je zanedbatelné, naproti tomu zploštění Jupitera a Saturnu je už zřetelné.

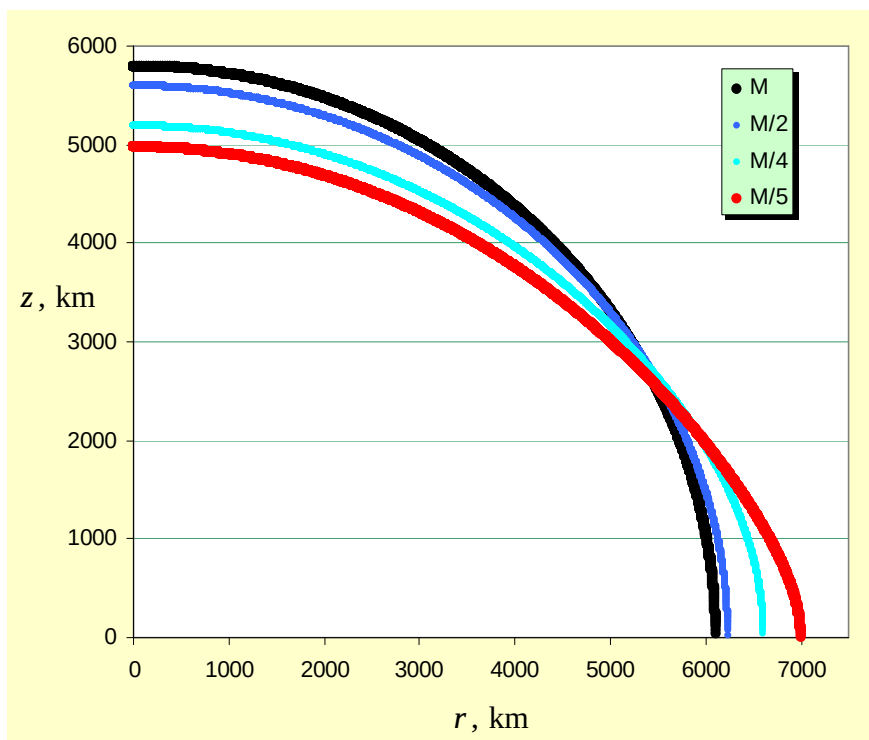
U Merkuru [56] dává řešení (R) vypočtené s krokem $h = 0.005$ km pro polární rádius $z(0) = 2\,439.7$ km jako počáteční podmínku, poloměr rovníku $r_e = z^{-1}(0) = 2\,439.74$ km a zploštění 0.0000164.

U Jupitera [60] je $M = 1.8986 \times 10^{27}$ kg, $\omega = 2\pi/35\,730 = 1.773408 \times 10^{-4}$ s⁻¹. Řešením rovnice (R) s počáteční podmínkou $z(0) = 66\,854$ km a krokem $h = 0.5$ km jsme dostali poloměr rovníku kapalného modelu $r_e = 69\,658$ km a zploštění $1 - 66\,854/69\,658.5 = 0.04026$, což je 62 % uváděného zploštění 0.06487. U Saturnu [61] je polární poloměr $z(0) = 54\,364$ km a poloměr rovníku vypočtený s krokem $h = 0.1$ km je $r_e = z^{-1}(0) = 58\,547$ km (obr. 19). Uváděné zploštění Saturnu je 0.09796, zploštění vypočtené pomocí modelu homogenní kapaliny je 0.07145, tj. 73 % empirického.



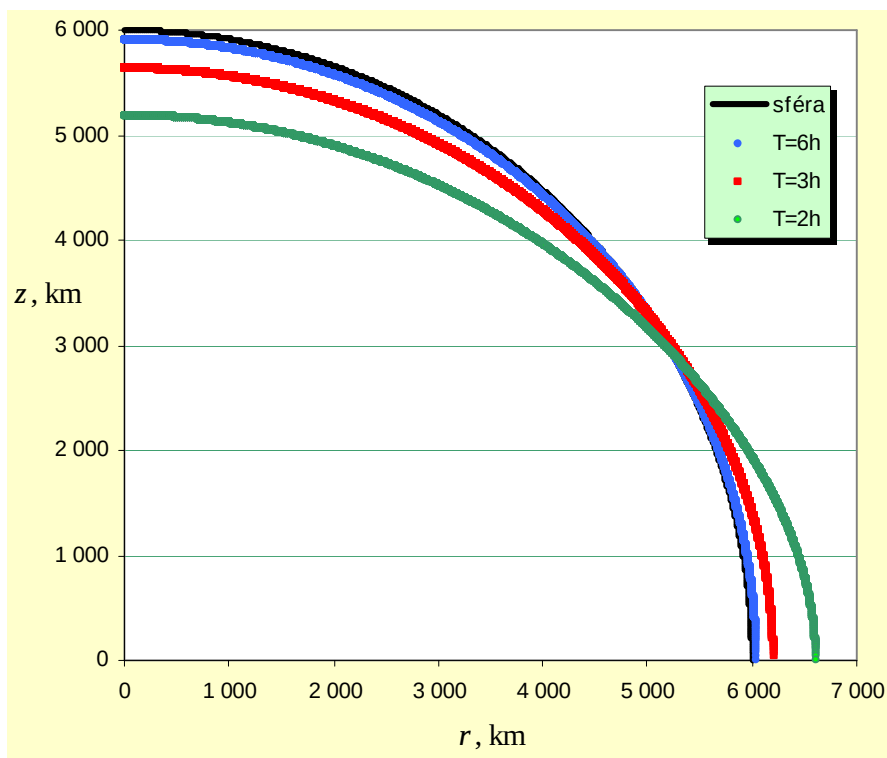
Obr. 19 – Odhad poloměru rovníku r_e Saturnu regresní parabolou pro několik bodů (r_i, z_i) řešení (R).

- Vliv hustoty na tvar tekutého objektu při pevné úhlové rychlosti.



Obr. 20 – Vliv hustoty homogenního objektu ($M = 6.0 \times 10^{24}$ kg, klidový rádius $r(0) = 6\,000$ km, pevný objem $V = 4\pi/3 \times r^3(0) \approx 9.04779 \times 10^{11}$ km³) na tvar meridiánu při pevné rychlosti rotace ($T = 14\,400$ s = 4 h).

- Vliv rychlosti rotace na tvar tekutého objektu při zachování hustoty.



Obr. 21 – Vliv úhlové rychlosti (doby otáčky T) na tvar meridiánu při stejné celkové hustotě objektu ($M = 6.0 \times 10^{24}$ kg, $V = 9.0477868 \times 10^{11}$ km³, klidový rádius 6 000 km) .

•

Elipsa se středem v počátku (0, 0) a poloosami a, b je v prvním kvadrantu vyjádřena rovnicí

$$z(r) = b \sqrt{1 - r^2/a^2},$$

již odpovídá diferenciální rovnice

$$\frac{d}{dr} z(r) = z'(r) = \frac{b}{\sqrt{1 - r^2/a^2}} \left(\frac{-r}{a^2} \right) = - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{r}{z(r)}. \quad (E)$$

Ta je odlišná od rovnice (R).

Na rotačním elipsoidu vytvořeném rotací elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, $b < a$, kolem její svislé osy podmínky rovnováhy, tj.

1. gravitační zrychlení míří do středu (0, 0),
2. odstředivé zrychlení při úhlové rychlosti rotace ω je $\omega^2 r$,

generují jiný úhel α než vztah (E).

Ze současné platnosti (R) a (E) plyne totiž spor. Odečtením (R) – (E) dostáváme

$$\frac{\omega^2}{GM} (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 1 + \frac{b^2}{a^2} = 0.$$

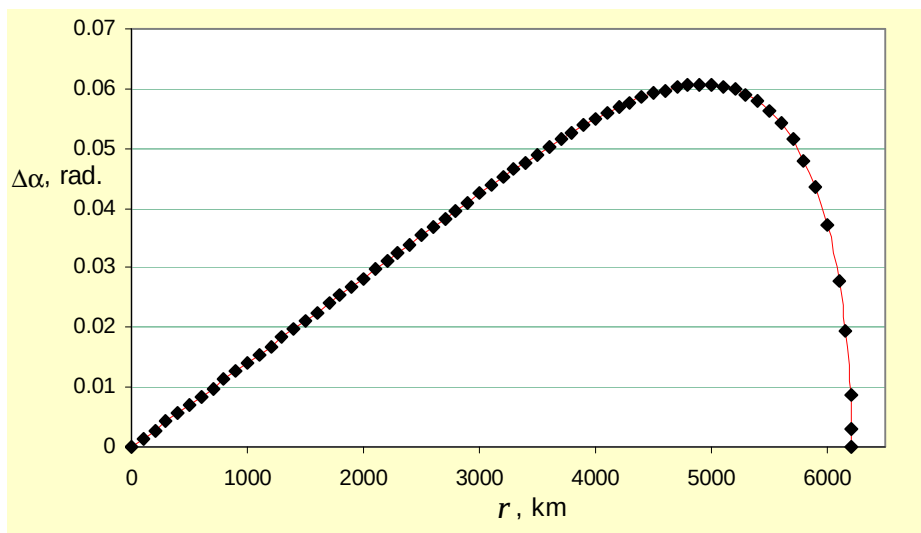
Jednoduchými úpravami odtud dostaneme

$$r^2 + z^2 = \left[\left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{GM}{\omega^2} \right]^{\frac{2}{3}} = \text{const} = R^2,$$

tedy kružnici o poloměru $R = R(\frac{b}{a}, \omega) = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{GM}{\omega^2}}$. Pak by ovšem bylo $a = b$ a dále $R = 0$.

Příklad. Neshodu uvedených předpokladů u rotačního elipsoidu opsaného tělesu z obr. 21 při době otáčky $T = 3$ h ilustruje rozdíl úhlů α u zrychlení a tečen na elipse (obr. 21) s poloosami $a = 6\,210.09$, $b = 6\,000$,

$$\Delta\alpha = \arctan \frac{d}{dr} z_{\text{ellipt}}(r) - \arctan \frac{d}{dr} z_{\text{zrychl}}(r).$$



Obr. 22. – Rozdíl úhlu směrnice tečny k elipse opsané meridiánu tělesa z obr. 21 pro $T = 3$ h a úhlu mezi příslušným zrychlením a osou rotace.

Poznámka. Je jasné, že nesoulad mezi předpokládanou pravidelností a realitou je znepokojující. Snaha o matematický popis odchylek od kulového tvaru, jako na obr. 18, možná vedla Laplacea k zavedení sférických funkcí. Informace o nich obsahuje kniha [32], ilustrace jsou např. v odkazech [65, 66].

Poznámka. Obr. 21 ukazuje, jak se s rostoucí úhlovou rychlostí ω zvětšuje rovnovážný poloměr rovníku r_e . Když ω vzroste tak, že r_e by překročil kritickou mez $R_{cr} = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}$, hmota na rovníku se odtrhne.

Celková hmotnost M se zmenší a také kritická mez R_{cr} se redukuje. Tak by destrukce tělesa pokračovala do nastolení nové rovnováhy. Pro dobu otáčky $T = 2$ h = 7 200 s je $\omega = 0.0008726646$ s⁻¹, $R_{cr} \approx 8.070\,973 \times 10^6$ m $\approx 8\,071$ km a vypočtený poloměr rovníku je $r_e \approx 6\,614.933$ km. Pro $T = 1.5$ h = 5 400 s je $\omega = 0.00116355$ s⁻¹, $R_{cr} \approx 6.662\,441 \times 10^6$ m $\approx 6\,662$ km a to je jen nepatrně větší poloměr než r_e pro $T = 2$ h. V tomto případě numerické řešení rovnice (R) selhává, neboť nastupuje katastrofický scénář odtrhávání hmoty na rovníku. Příčinou náhlého zvýšení úhlové rychlosti sledovaného tělesa může být např. dopad vnějšího tělesa s velkou hybností ve směru blízkém lokální rychlosti rotace povrchu.

OBÍHÁNÍ KOLEM DOMINANTNÍHO OBJEKTU (CENTRÁLNÍ GRAVITAČNÍ POLE)

Zvolme hmotnost dominantního a tedy nepohyblivého objektu $M = 2\,000$ nějakých násobků kg a umístíme jeho těžiště do počátku $\mathbf{0}$ souřadného systému Oxy . Hmotnost přitahovaného objektu (o) volme $m = 1$ stejných násobků kg a “gravitační” konstantu např. $G = 10^{-3}$ (místo skutečné $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$). Veličiny počítané za těchto předpokladů budeme dále uvádět jen jako čísla, bez fyzikálního rozměru. “Gravitační” zrychlení objektu (o) je

$$\mathbf{g} = \frac{GM}{r^3} \mathbf{r},$$

kde $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)^T$ je polohový vektor (o).

Předchozí rovnice vyjadřuje zákon reciprokého čtverce vzdálenosti (u statického elektrického nebo magnetického pole se mu říká Coulombův zákon [67]). Hmotnosti m a M zhruba odpovídají poměru hmotností elektronu a protonu v atomu vodíku.

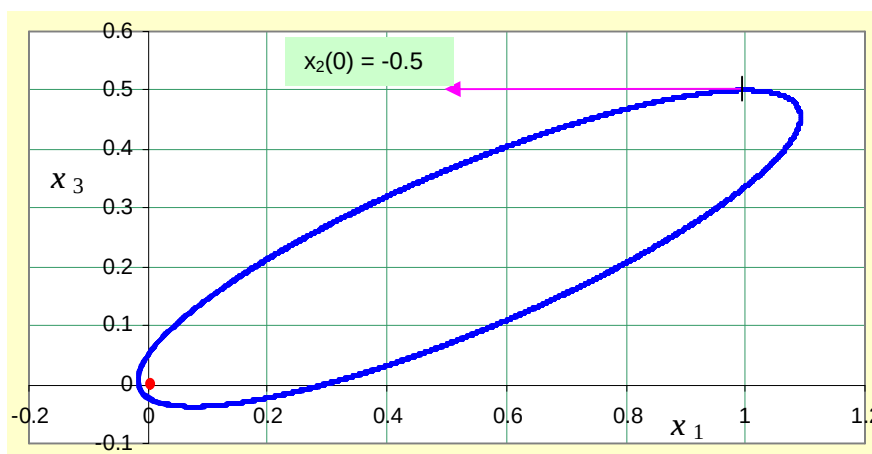
Pro numerické řešení přepíšeme pohybovou rovnici

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}$$

do tvaru soustavy 4 diferenciálních rovnic 1. řádu

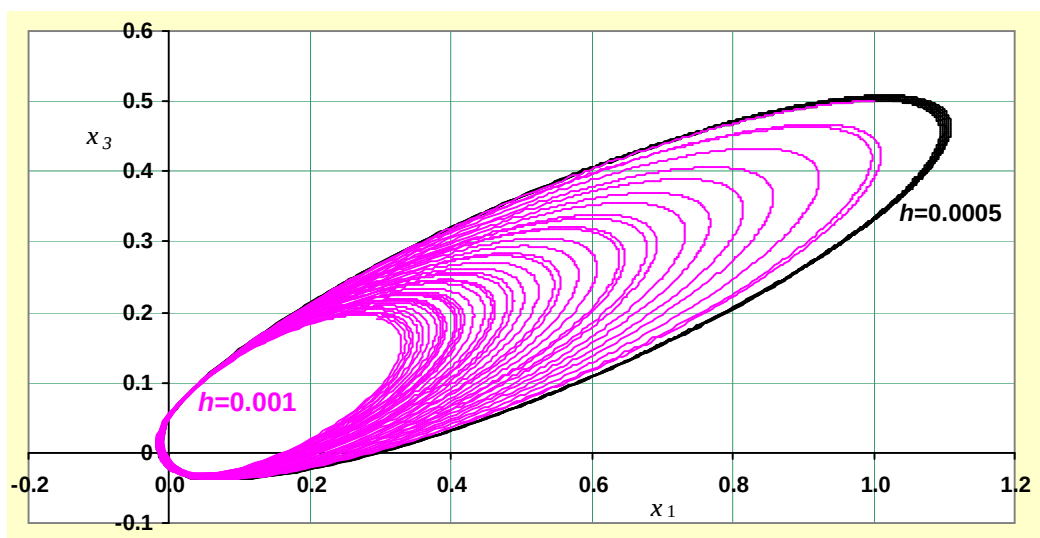
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1 &= x_2, \\ \frac{d}{dt} x_2 &= -GM (x_1^2 + x_3^2)^{-3/2} x_1, \\ \frac{d}{dt} x_3 &= x_4, \\ \frac{d}{dt} x_4 &= -GM (x_1^2 + x_3^2)^{-3/2} x_3. \end{aligned} \tag{S1}$$

Zadáme-li polohu objektu (o) v určitém okamžiku (počáteční podmínka), třeba $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, je pro čas $t > 0$ i pro $t < 0$ jednoznačně zadán pohyb (o) v budoucnosti i v minulosti (věta o existenci a jednoznačnosti řešení vektorové diferenciální rovnice, např. [12]). Příklad numerického řešení ukazuje obr. 23 ($G = 10^{-3}$, $M = 2000$).



Obr. 23 – Numerické řešení systému (S1) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}_0 = (1, -0.5, 0.5, 0)^T$ (cca 13.5 oběhů).

Pohyb začal v bodě $(x_{10}, x_{30}) = (1, 0.5)$ počáteční rychlostí $\mathbf{v} = (x_{20}, x_{40})^T = (-0.5, 0)^T$, integrační krok byl $h = 0.00005$, oběžná doba $T \approx 2.072$ časových jednotek. Po 62 000 krocích zpracovaných Fehlbergovou metodou [13] se poslední hodnoty vzaly jako počáteční hodnoty nového výpočtu. To se $9\times$ opakovalo. Pro grafické zobrazení trajektorie v EXCELU se zaznamenala jen každá 20. dvojice (x_{1i}, x_{3i}) . Tento příklad ukazuje, že při dostatečně přesném výpočtu (malém kroku) se trajektorie dá postupně prodlužovat. Omezené zobrazení čísel v počítači a konečný integrační krok by ale později jistě vedly k falešným výsledkům. Např. desetinásobný konstantní krok $h = 0.0005$ v celkově velkém počtu se zřetelně projevuje jen v 'afelu'. Další volba, $h = 0.001$, už ale trajektorii deformuje velmi výrazně a mění ji ve spirálu (obr. 24). Přitom důvodem není nic než chyba počítání. Proto před vyvozováním nějakých závěrů je nutná velká opatrnost, ověřování přesnosti a analýza výsledků.



Obr. 24 – Názorná ilustrace nedostatečně malého integračního kroku při numerickém řešení stejné úlohy jako na obr. 23.

Moderní software, např. DELPHI, umožňuje snadno pracovat s velkými poli, resp. ukládat třeba do textového souboru jen každý k -tý výsledek integrace (např. $k = 20$) pro přenos do EXCELU a grafické znázornění. Zvládnutí numerického řešení soustavy (S1) přináší samozřejmě bohaté možnosti experimentování prostřednictvím počátečních podmínek.

Začneme kruhovou trajektorií. Ta je definována rovností gravitačního zrychlení a odstředivého zrychlení. Označíme-li poloměr kruhové dráhy a , má platit

$$\frac{GM}{a^2} = \omega^2 a,$$

tedy translační rychlost

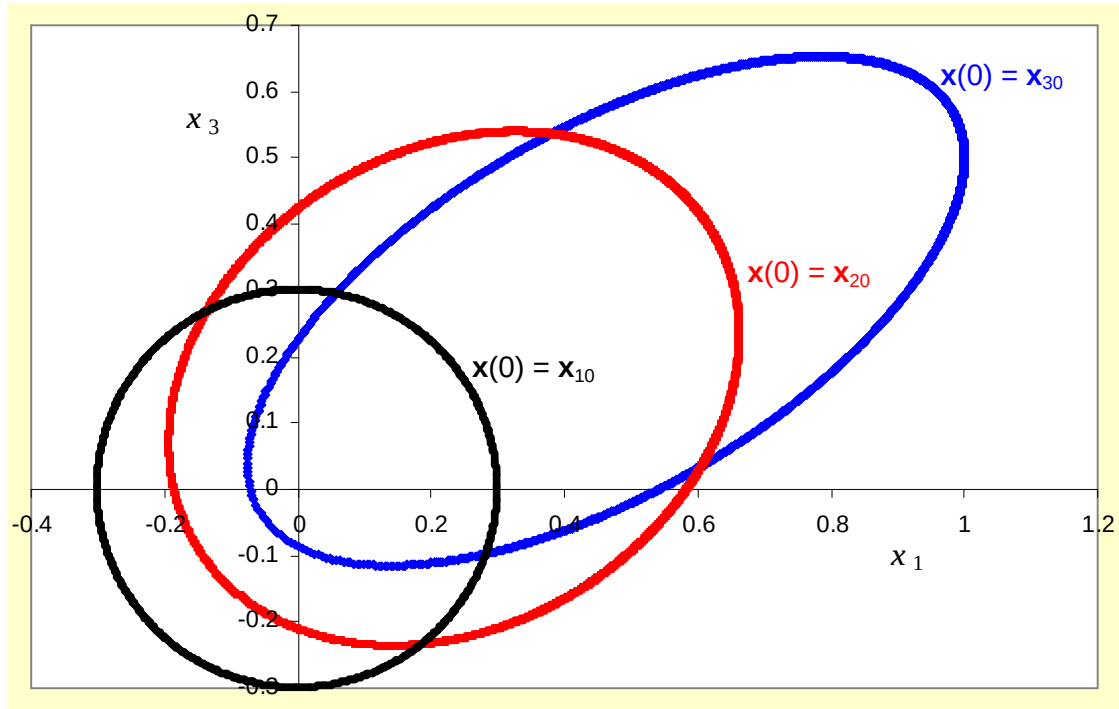
$$v_a = \omega a = \sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

Např. pro $a = 0.3$ ($M = 2000$, $G = 0.001$) dostaneme $v_a = \sqrt{2/0.3} = 2.5819888\dots$

Trajektorie pro počáteční podmínky

$$\mathbf{x}_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ v_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3 \\ 2.5819888\dots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{20} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{30} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

tj. kruhová dráha ($a = 0.3$) a dvě eliptické dráhy jsou zakresleny na obr. 25.



Obr. 25 – Trajektorie tělesa hmotnosti $m = 1$, které obíhá těleso s hmotností $M = 2000$ umístěné v počátku $(0, 0)$. Počáteční podmínky jsou $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{k0}$, $k = 1, 2, 3$.

Z uvedených obrázků vidíme, že trajektorie periodických oběhů kolem centrálního objektu v bodě $(0, 0)$ jsou elipsy, jak říká 1. Keplerův zákon. Doby oběhu jsou dány přibližně počtem dvacetinásobků $h = 0.00005$ potřebných k opětovnému dosažení výchozí polohy $\mathbf{x}_{k0}$, kde $k = 1, 2, 3$, tj. $T_1 \approx 0.73$, $T_2 \approx 1.348$, $T_3 \approx 2.07$. Průměr kruhové dráhy je $2a_1 = 0.6$, délku hlavních os (průměr) jsme prostě odměřili pravítkem na obr. 25 a přepočtli: $2a_2 \approx 0.9056$, $2a_3 \approx 1.211$. Pro ověření 3. Keplerova zákona sestavíme rozdíly třetích mocnin podílů poloos a čtverců podílů oběžných dob:

$$(a_2/a_1)^3 - (T_2/T_1)^2 = 0.028, \quad (a_3/a_1)^3 - (T_3/T_1)^2 = 0.183, \quad (a_3/a_1)^3 - (T_3/T_2)^2 = 0.034.$$

Relativní rozdíly v procentech

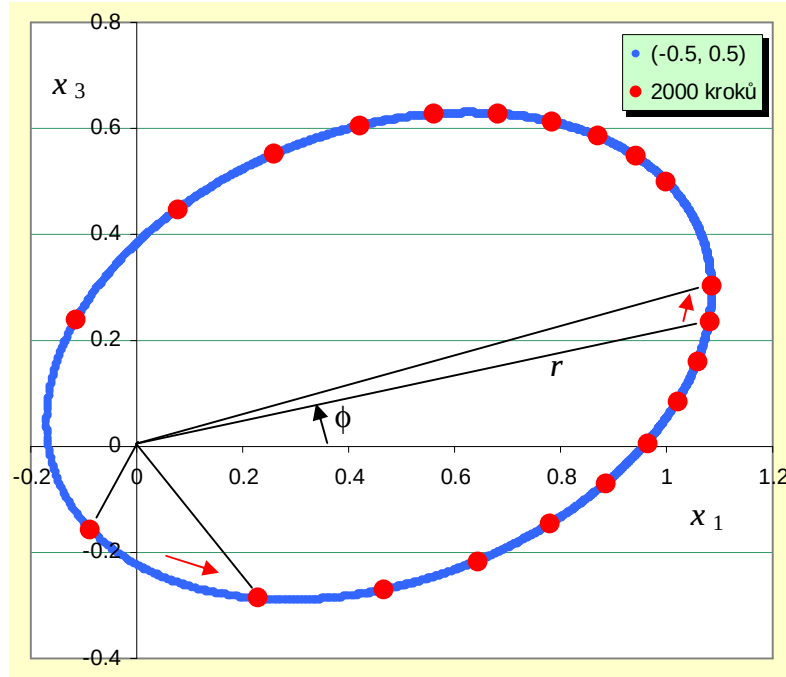
$$D_{21} = [(a_2/a_1)^3 / (T_2/T_1)^2 - 1] \times 100 = 0.824,$$

$$D_{31} = [(a_3/a_1)^3 / (T_3/T_1)^2 - 1] \times 100 = 2.280,$$

$$D_{32} = [(a_3/a_2)^3 / (T_3/T_2)^2 - 1] \times 100 = 1.444,$$

nepřekračují tedy 2.5 %. Přesnějším stanovením parametrů drah a period oběhu (výpočtem) by se samozřejmě relativní rozdíly daly libovolně zmenšit.

Proměnnou rychlost translačního pohybu po elipse, vyjádřenou délkou oblouku za stejný čas, vyjádřenou 2. Keplerovým zákonem (o konstantní plošné rychlosti) předvádí obr. 26.



Obr. 26 – Oblouky opsané za stejný čas na elipse, zadané počáteční podmínkou $\mathbf{x}(0) = (1, -0.5, 0.5, 0.5)^T$.

Pro zjednodušení je výhodné elipsu s nenulovou excentricitou pootočit tak, aby její hlavní osa splývala s osou $0x$. Symetrie umožňuje najít úhel otočení ϕ_0 (sklon hlavní osy) z podílu středních hodnot vertikální a horizontální souřadnice za jeden cyklus

$$\phi_0 = \arctan \frac{\overline{x_3}}{\overline{x_1}} = \arctan \frac{\sum_{i=1}^n x_{3i}}{\sum_{i=1}^n x_{1i}},$$

kde n je počet vypočtených bodů reprezentujících celý cyklus (dobu oběhu).

Dále budeme tedy uvažovat dráhy vycházející z bodu $\mathbf{x}(0) = (-0.1, 0, 0, x_4(0))^T$, tj. kuželosečkami s osami rovnoběžnými s osami souřadnic x_1, x_3 a budeme ilustrovat vliv vertikální složky počáteční rychlosti $x_4(0)$. Několik případů ukazuje obr. 27.

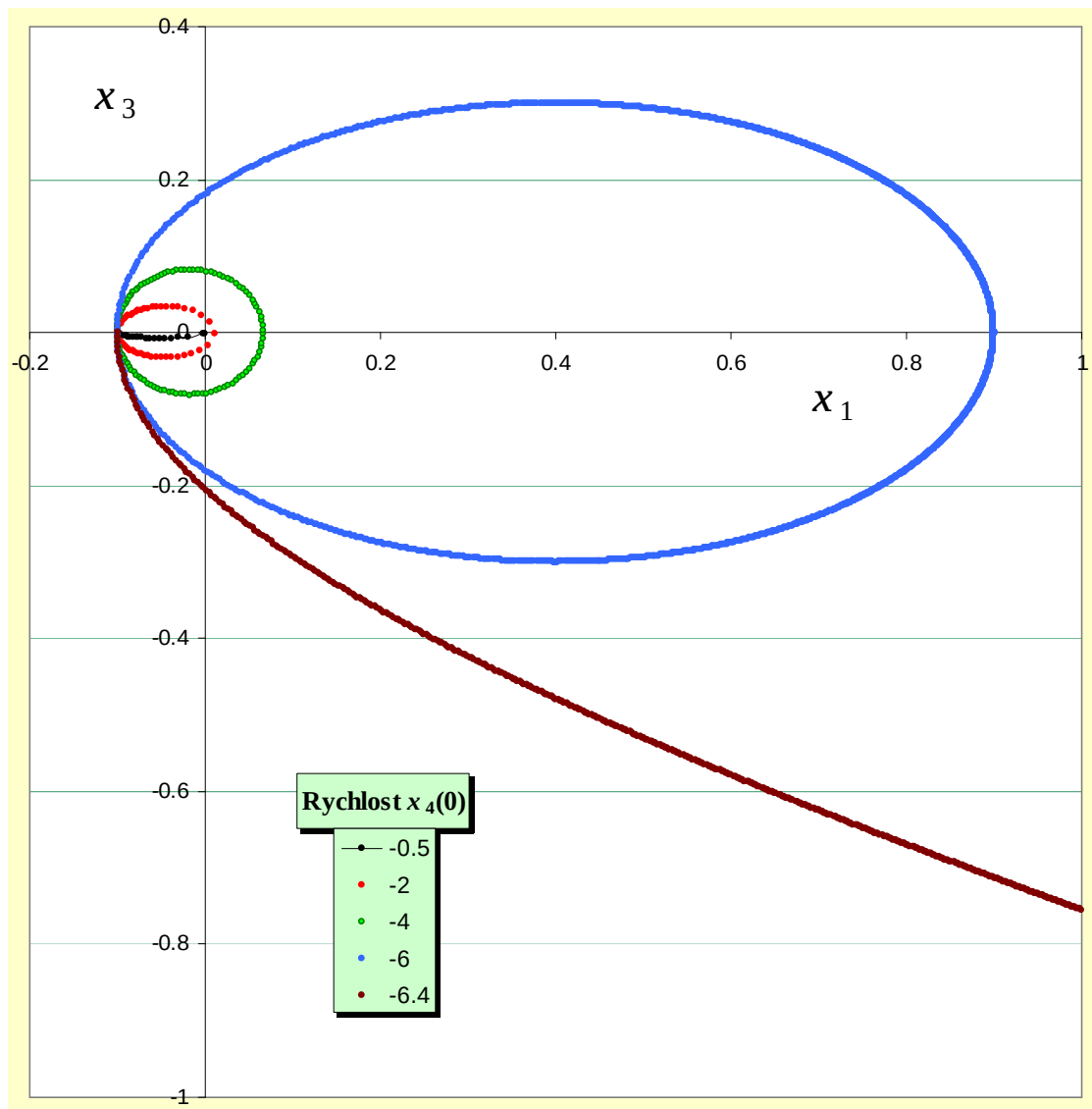
Při počáteční rychlosti $x_4(0) = -0.5$ dopadne objekt (o) na dominantní objekt v počátku souřadnic. Při rychlostech $x_4(0) = -2, -4, -6$ začne opisovat elipsy a při rychlosti $x_4(0) = -6.4$ odletí po hyperbole do nekonečna.

Pro určení druhu kuželosečky je asi nejjednodušší pracovat s polárním vyjádřením kuželosečky [70-72]

$$r(\phi; \varepsilon, p) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi},$$

kde r je vzdálenost objektu (o) od ohniska v počátku souřadnic $(0, 0)$, p je parametr kuželosečky, ε je numerická excentricita a ϕ je polární úhel sevřený průvodičem (o)

s osou $0x_1$. U elipsy je $\varepsilon < 1$, u paraboly $\varepsilon = 1$, u hyperboly $\varepsilon > 1$.



Obr. 27 – Vliv vertikální složky počáteční rychlosti $x_4(0)$ na tvar dráhy vycházející z bodu $(x_1, x_3) = (-0.1, 0)$.

Protože máme k dispozici velký počet souřadnicových bodů (x_1, x_3) , určíme parametry ε a p regresí. Zřejmě je (obr. 26)

$$\cos \phi = x_1/r,$$

takže (budeme psát jen x místo x_1)

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi} = \frac{p}{1 + \varepsilon \frac{x}{r}} = \frac{r p}{r + \varepsilon x}.$$

Jednoduchými úpravami převedeme tuto rovnici na tvar

$$\varepsilon x - p = -r.$$

Výpočtem dráhy dostáváme dvojice (x_i, x_{3i}) , z nichž můžeme snadno počítat

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + x_{3i}^2}.$$

Je známo, že při normalitě x_i , x_{3i} mají chyby r_i Rayleighovo rozdělení [7, 20, 68]. Protože však o distribuci x_{3i} nic nevíme, budeme u r_i pro zjednodušení předpokládat normální rozdělení. Tím dostaneme klasickou úlohu lineární regrese

$$S(\varepsilon, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\varepsilon x_i - p + r_i)^2 \longrightarrow \min.$$

Z nutné podmínky pro minimum hladké funkce S , tj. anulování derivací, plyne

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \sum_{i=1}^m (\varepsilon x_i - p + r_i) x_i = \varepsilon \sum_{i=1}^m x_i^2 - p \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m r_i x_i = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial p} = \sum_{i=1}^m (\varepsilon x_i - p + r_i) (-1) = -\varepsilon \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m p - \sum_{i=1}^m r_i = 0,$$

Tato soustava lineárních rovnic pro dvě neznámé se dá snadno sestavit a řešit v EXCELU. Úseky kuželoseček je jen nutné volit tak, aby x_3 bylo jednoznačnou funkcí x . Za řešení se berou absolutní hodnoty p a ε , jak to vyžaduje geometrická interpretace.

U elipsy s poloosami a , b je

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Např. u velké elipsy na obr. 27 (pro $x_4(0) = -6$) při volbě horní poloviny elipsy ($n = 785$ bodů) vyšlo $\varepsilon = 0.8$, $p = 0.18$. Z inverzních vztahů

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

dostaneme $a = 0.5$, $b = 0.3$.

K použití polárního vyjádření kuželoseček nás motivovala snaha ukázat, že řešením pro $x_4(0) = 6.4$ dostáváme už hyperbolu, $\varepsilon > 1$. U úseku $n = 626$ bodů od počátečního bodu skutečně vyšla regresí excentricita $\varepsilon = 1.048 > 1$. Únikovou nebo druhou kosmickou rychlost 2v dostaneme z rovnosti kinetické a potenciální energie (o),

$$\frac{1}{2} m ({}^2v)^2 = m \frac{GM}{r}.$$

V tomto případě

$${}^2v = \sqrt{\frac{2GM}{r(0)}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.001 \times 2000}{0.1}} = \sqrt{40} = 6.3245...$$

a $6.4 > {}^2v$. To je druhé potvrzení, že dráha pro $x_4(0) = 6.4$ je hyperbolická.

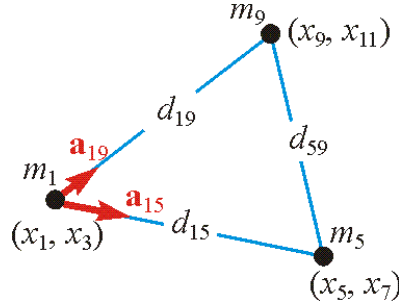
Poznámka. K popisu pohybu tělesa v centrálním poli ve 3D (R^3) by bylo třeba soustavu (S1) rozšířit na 6 (resp. v R^n na $2n$) rovnic. Pohyb v centrálním gravitačním poli v R^3 se však děje v rovině určené počátečními vektory polohy a rychlosti. Zjednodušení na rovinný problém je tedy korektní.

Poznámka. O Keplerových zákonech a speciálně jejich důsledku, gravitačním zákoně, velmi dobře a úsporně píše autor odkazu [69]. Toto téma je standardní součástí učebnic mechaniky, např. [70, 71] a zvláště nebeské mechaniky [72].

Poznámka. Kolem r. 1679 dospěl R. Hooke k závěru, že gravitační síla je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti a sdělil to v jednom dopise Newtonovi [73, 74].

GRAVITAČNÍ POHYB TŘÍ TĚLES V ROVINĚ

Pohyb jednoho tělesa je popsán polohovým vektorem a vektorem rychlosti. V rovině má každý z nich 2 složky. K popisu pohybu jednoho bodu potřebujeme 4 diferenciální rovnice 1. řádu. A u gravitační interakce tří těles v rovině potřebujeme tedy soustavu tří čtveřic rovnic 1. řádu, celkem 12 rovnic.



Obr. 28 – Symbolika u tří těles v rovině: $\mathbf{a}_{15}$ je zrychlení v bodě (x_1, x_3) způsobené hmotností m_5 v bodě

$$(x_5, x_7), \quad d_{15} = \sqrt{(x_1 - x_5)^2 + (x_3 - x_7)^2} = d_{51}, \text{ atd.}$$

Použijeme-li symboliky z náčrtku na obr. 28, dostaneme následující systém rovnic:

$$\frac{d}{dt} x_1 = x_2,$$

$$\frac{d}{dt} x_2 = \frac{d^2}{dt^2} x_1 = -G \left[m_5 \frac{x_1 - x_5}{d_{15}^3} + m_9 \frac{x_1 - x_9}{d_{19}^3} \right],$$

$$\frac{d}{dt} x_3 = x_4,$$

$$\frac{d}{dt} x_4 = \frac{d^2}{dt^2} x_3 = -G \left[m_5 \frac{x_3 - x_7}{d_{15}^3} + m_9 \frac{x_3 - x_{11}}{d_{19}^3} \right],$$

$$\frac{d}{dt} x_5 = x_6,$$

$$\frac{d}{dt} x_6 = \frac{d^2}{dt^2} x_5 = -G \left[m_1 \frac{x_5 - x_1}{d_{15}^3} + m_9 \frac{x_5 - x_9}{d_{59}^3} \right]$$

$$\frac{d}{dt} x_7 = x_8,$$

$$\frac{d}{dt} x_8 = \frac{d^2}{dt^2} x_7 = -G \left[m_1 \frac{x_7 - x_3}{d_{15}^3} + m_9 \frac{x_7 - x_{11}}{d_{59}^3} \right]$$

$$\frac{d}{dt} x_9 = x_{10},$$

$$\frac{d}{dt} x_{10} = \frac{d^2}{dt^2} x_9 = -G \left[m_1 \frac{x_9 - x_1}{d_{19}^3} + m_5 \frac{x_9 - x_5}{d_{59}^3} \right]$$

$$\frac{d}{dt} x_{11} = x_{12},$$

$$\frac{d}{dt} x_{12} = \frac{d^2}{dt^2} x_{11} = -G \left[m_1 \frac{x_{11} - x_3}{d_{19}^3} + m_5 \frac{x_{11} - x_7}{d_{59}^3} \right].$$

$$\begin{pmatrix} & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

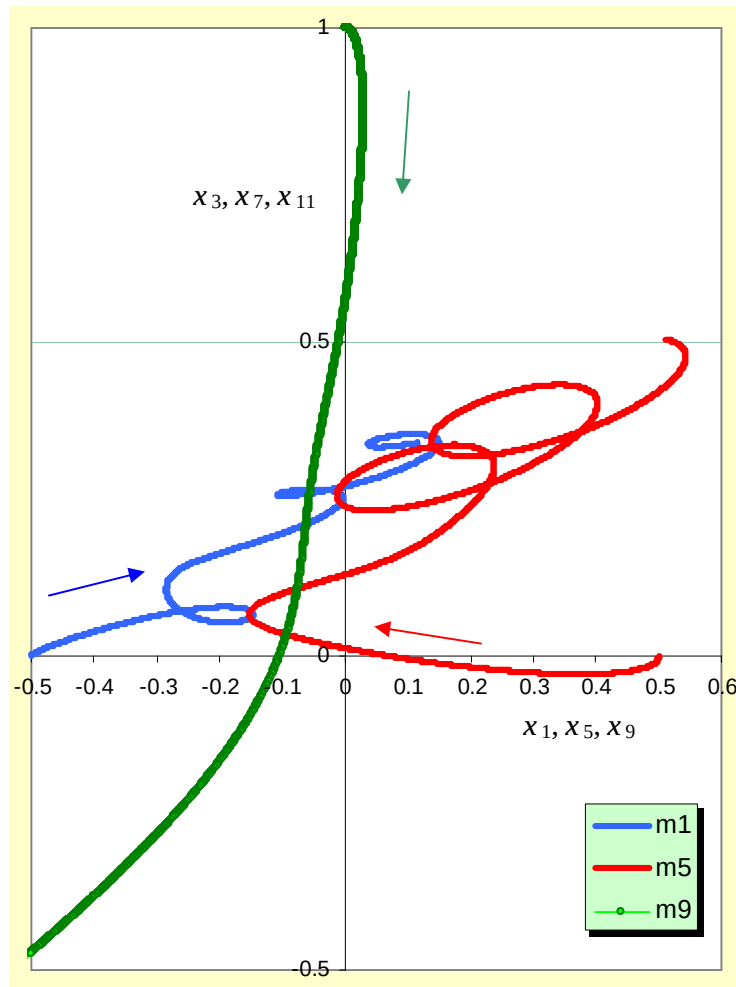
(S3)

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Pro numerické řešení je třeba soustavu (S3) doplnit počátečními podmínkami. Složkám polohových vektorů přísluší liché indexy a složkám rychlostí sudé indexy.

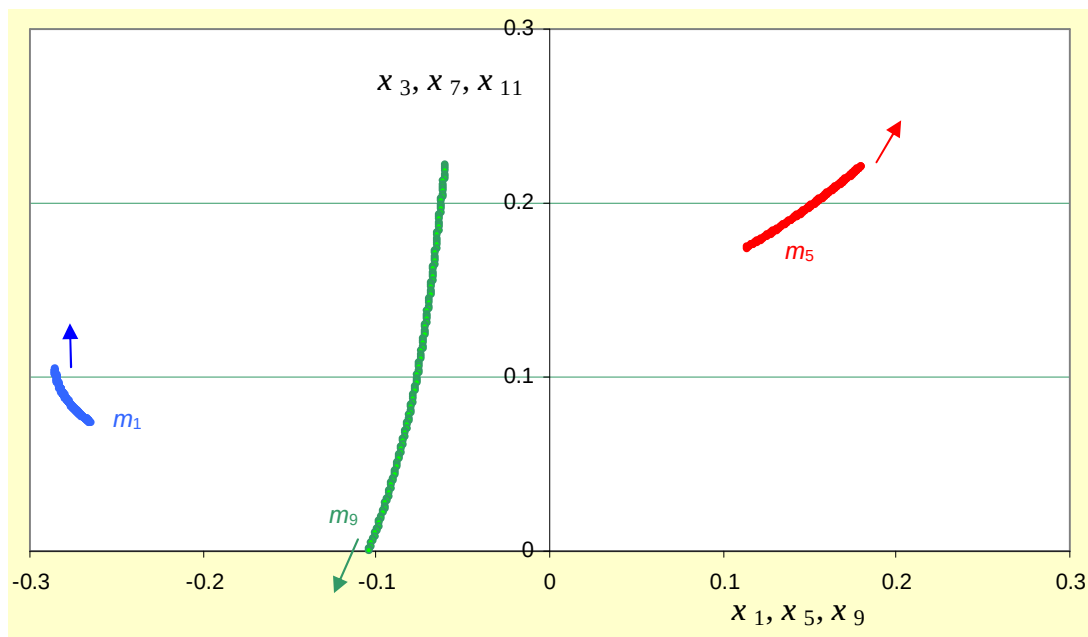
Obr. 29 představí řešení pro $m_1 = 2000$, $m_5 = 1000$, $m_9 = 500$, 'gravitační' konstantu $G = 0.0001$ a počáteční vektor $\mathbf{x}_0$ (níže). Po 60 000 krocích integrace Fehlbergovou metodou [13] se dospělo do bodu $\mathbf{x}_1$ (níže). Ten se vzal jako počáteční bod pro dalších 60 000 kroků. Tak bylo možno pokračovat dál.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \\ x_5(0) \\ x_6(0) \\ x_7(0) \\ x_8(0) \\ x_9(0) \\ x_{10}(0) \\ x_{11}(0) \\ x_{12}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0.01 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ -0.05 \\ 0 \\ 0.05 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \\ x_3(3) \\ x_4(3) \\ x_5(3) \\ x_6(3) \\ x_7(3) \\ x_8(3) \\ x_9(3) \\ x_{10}(3) \\ x_{11}(3) \\ x_{12}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1733765729 \\ 0.3026496387 \\ 0.1715121801 \\ 0.0927556674 \\ 0.2060478262 \\ -0.2477745728 \\ 0.3325972151 \\ 0.0615570821 \\ -0.5685893608 \\ -0.6650494093 \\ -0.5312431508 \\ -0.5541368336 \end{pmatrix}.$$



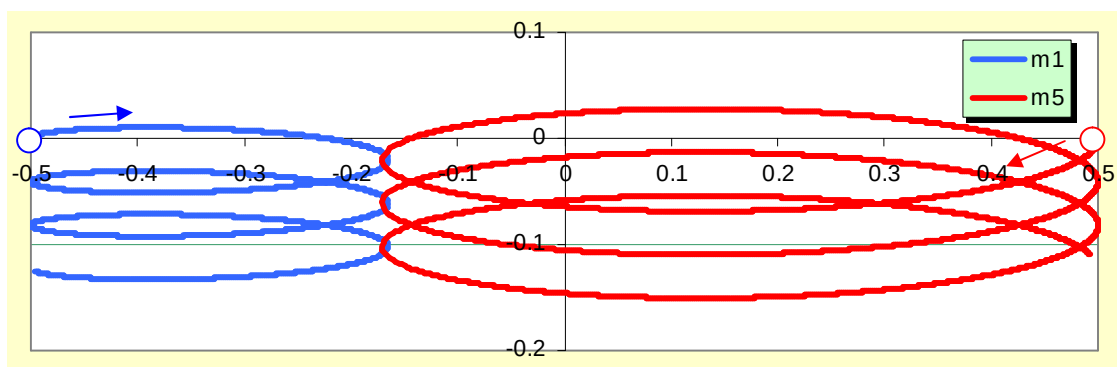
Obr. 29 – Dráhy tří těles uvažované soustavy.

Obr. 29 ukazuje nepravidelnost pohybu každého ze tří těles. Těleso s hmotností m_9 prolétne mezi tělesy s hmotnostmi m_1 , m_5 (obr. 30) a asi se k nim už nevrátí.



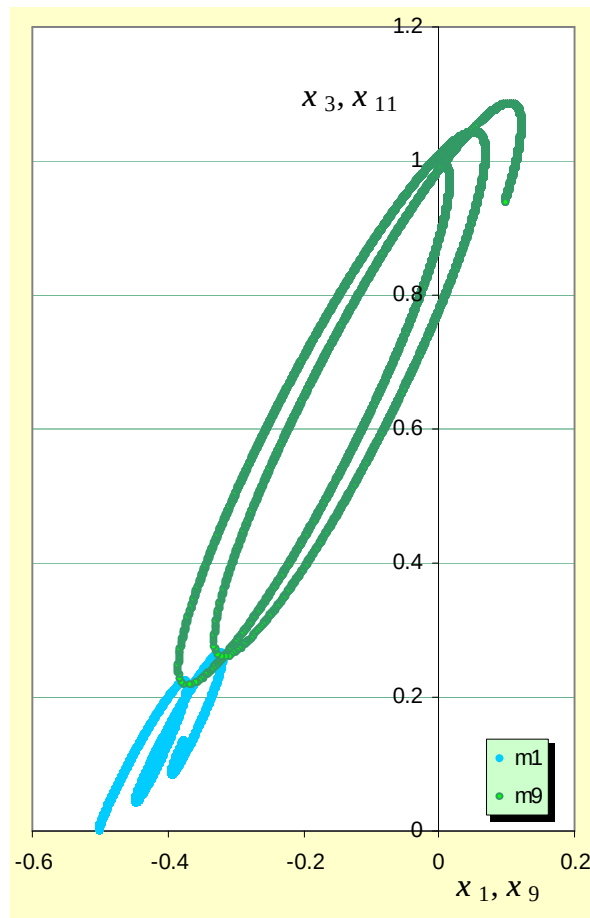
Obr. 30 – Dráhy tří těles uvažované soustavy v časovém intervalu průletu tělesa m_9 mezi m_1 a m_5 .

Zanedbáme-li působení třetího tělesa (s nejmenší hmotností m_9), dostaneme problém dvou těles. Ta se buď srazí nebo kolem sebe prolétnou a jejich pohyb se zharmonizuje jako na obr. 31.



Obr. 31 – Řešení problému 2 těles reprezentovaných soustavou rovnic ze str. 53 s počáteční podmínkou ze str. 54 pro $m_5 = 0$.

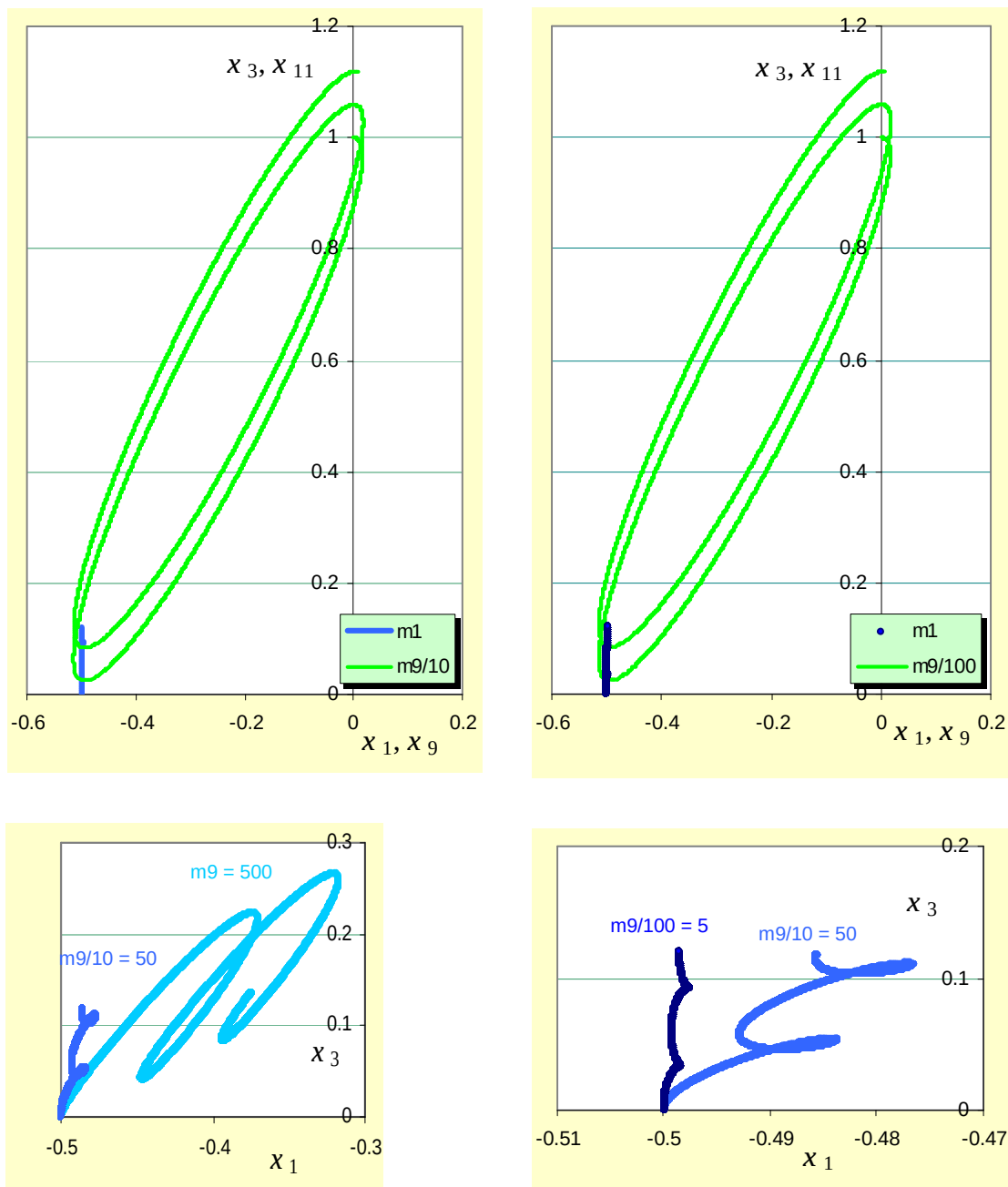
Trajektorie dvou osamocených těles našeho systému: tělesa s největší hmotností m_1 a tělesa s nejmenší hmotností m_9 ukazuje další obr. 32 (k eliminaci třetího tělesa ve výpočtech stačí jednoduše volit $m_5 = 0$).



Obr. 32 – Řešení problému 2 těles reprezentovaných soustavou rovnic(S3) ze str. 53 s počáteční podmínkou $\mathbf{x}_0$ ze str. 54 pro $m_5 = 0$.

U posledního případu ukážeme ještě vliv 10násobné a 100násobné redukce hmotnosti m_9 . Výsledky předvádí obr. 33.

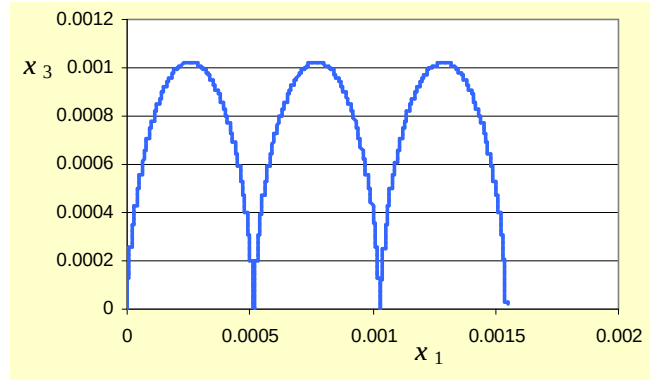
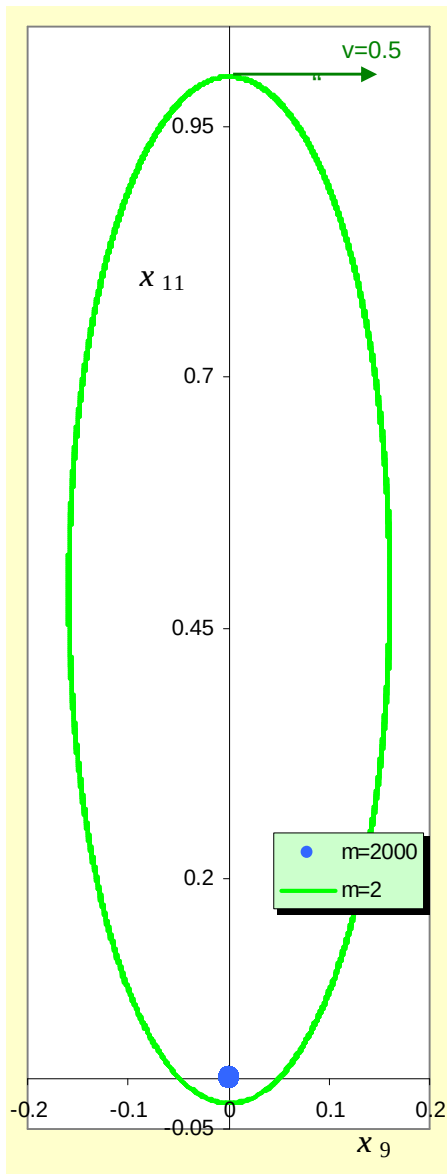
Obr. 31 až 33 naznačují, že zavedením souřadnicového systému spojeného s těžištěm soustavy by rovnoměrný pohyb celé soustavy jedním směrem (nahoru a doprava) měl zmizet, šroubovicové trajektorie by se měly transformovat v elipsy, čímž by se popis pohybu zjednodušil.



Obr. 33 – Vliv poklesu hmotnosti obíhajícího tělesa na trajektorii dominantního objektu.

Podobný efekt přináší velká převaha hmotnosti u jednoho tělesa proti druhému, takže těžiště soustavy je v dominantním tělese nebo jeho těsném okolí a jeho pohyb se stane zanedbatelný (obr. 34).

Konkrétním příkladem takové dominance je pohyb těžiště sluneční soustavy, které se občas ocitá vně 'tělesa' Slunce, a Slunce kolem něho obíhá ve smyčkách. Největší planeta Jupiter má hmotnost $m_{Ju} = 1.899 \times 10^{27}$ kg, hmotnost Slunce je víc než 1000krát větší, $m_{Sl} = 1.989 \times 10^{30}$ kg, takže u všech planet ve sluneční soustavě je poměr jejich hmotností k hmotnosti Slunce menší než 1/1000.



Obr. 34 – Vlevo: Pohyb dvou gravitačně vázaných těles s poměrem hmotností 1000 : 1. Počáteční rychlost dominantního tělesa je nulová. Horizontální složka počáteční rychlosti obíhajícího tělesa je 0.5, vertikální je 0 a jeho pohyb začíná nahoře v bodě (0, 1). Nahoře: detailní zobrazení pohybu těžiště dominantního tělesa.

U soustavy tří těles nepravidelnost pohybu neodstraní ani přenos počátku souřadného systému do těžiště. To předvádí obr. 35, v němž jsme vzali $m_5 = m_9 = 1000$ a ponechali $m_1 = 2000$, $G = 10^{-3}$. Počáteční vektor (připomínáme: horní index T značí transpozici, tj. přechod matice $1 \times n$ na transponovanou matici $n \times 1$)

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0.1, 0.5, -0.1, -0.5, 0, -0.5, -0.05, 0.5, 0.1, -0.5, 0)^T.$$

Mezi čtveřicemi složek patřícím k jednotlivým tělesům je větší mezera pro odlišení.

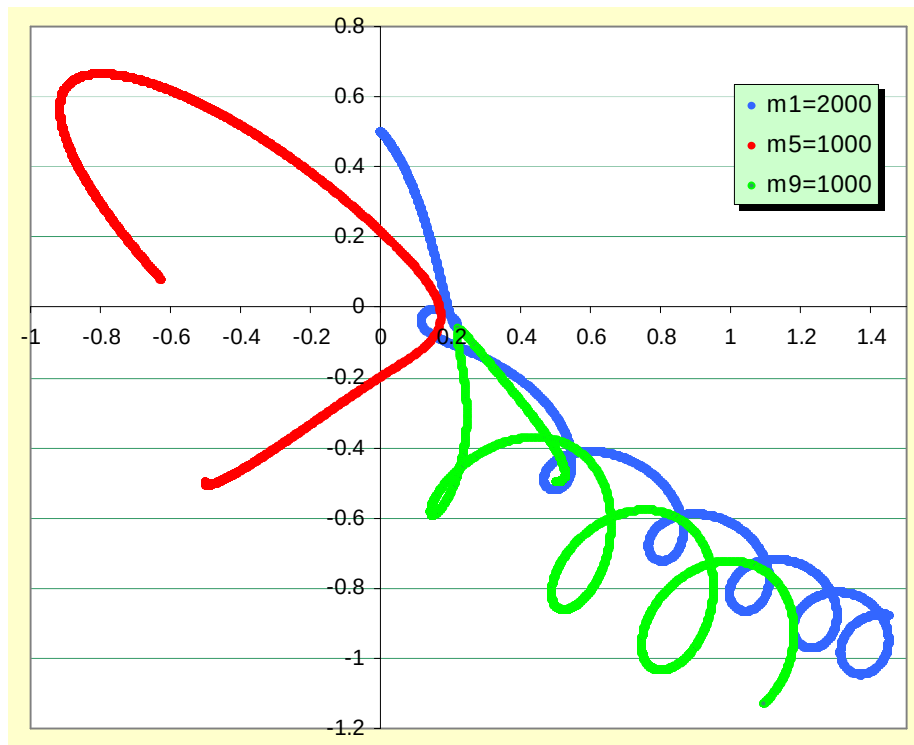
Poloha těžiště je určena vektorem

$$\mathbf{x}_{\text{těž}} = \frac{1}{m_1 + m_5 + m_9} \begin{pmatrix} m_1 x_1 + m_5 x_5 + m_9 x_9 \\ m_1 x_3 + m_5 x_7 + m_9 x_{11} \end{pmatrix},$$

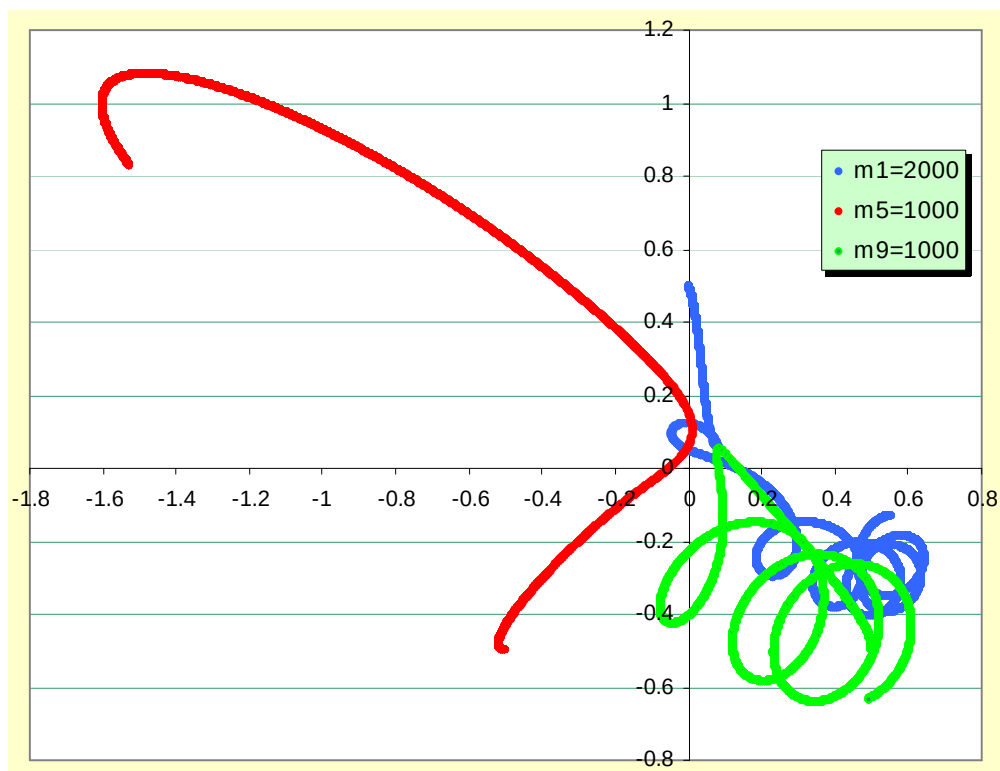
vektor rychlosti těžiště soustavy je konstantní

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{m_1 + m_5 + m_9} \begin{pmatrix} m_1 x_{02} + m_5 x_{06} + m_9 x_{0,10} \\ m_1 x_{04} + m_5 x_{08} + m_9 x_{0,12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0750 \\ -0.0625 \end{pmatrix}.$$

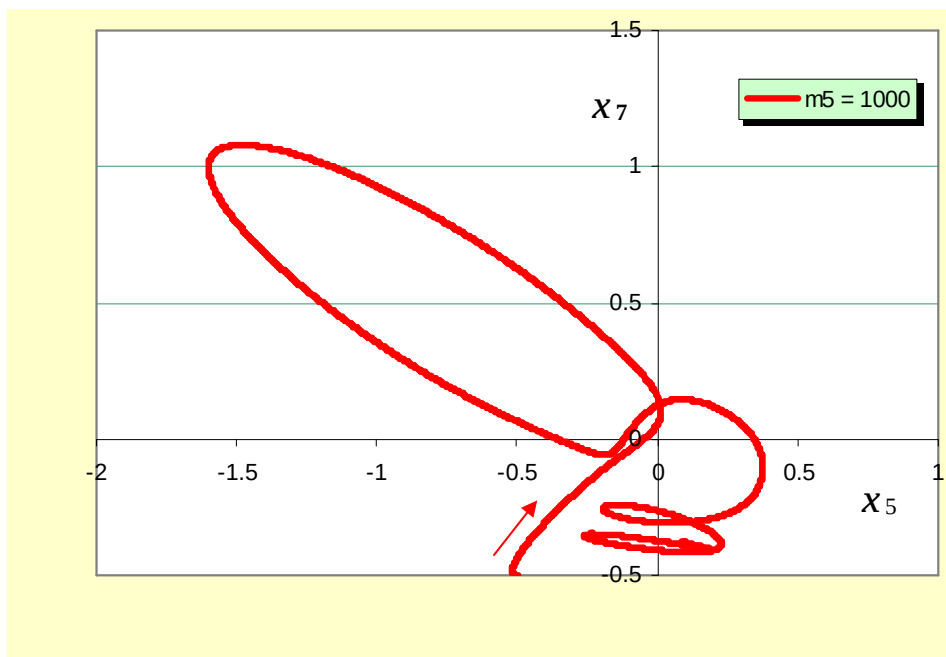
(a) Pevná soustava souřadnic.



(b) Počátek souřadnicového systému v těžišti soustavy těles.



Obr. 35 – Trajektorie těles s hmotnostmi m_1 , m_5 , m_9 se stejnými počátečními podmínkami.



Obr. 36 – Počáteční úsek trajektorie tělesa s hmotností m_5 (časový interval $[0, 22.8]$).

Poznámka. Snadno se odvodí, že k popisu pohybu systému n těles v prostoru $\mathbb{R}^m$ s euklidovskou metrikou bychom při obvyklém gravitačním zákoně potřebovali $n(n-1)m$ diferenciálních rovnic 1. řádu.

Je dobře známo, že obecný problém pohybu tří a více gravitačně vázaných těles ve dvou a třech dimenzích je analyticky neřešitelný. Koncem 19. století *Henri Poincaré* (1854–1912) [75] objevil chaotické chování systému 3 těles (přesněji deterministický chaos). A to znamenalo tečku za snahami o nalezení analytického řešení. Numerické řešení v omezeném časovém intervalu, jak ukázaly předchozí naprosto libovolně zvolené příklady, však možné je a jeho výpočet klade nároky jen na přesnost.

S chaotičností pohybu soustavy 3 a více těles se ovšem okamžitě vynořuje otázka stability sluneční soustavy. Newton se domníval, že k udržení její stability jsou nutné občasné zásahy Boha. Laplace analyzoval systém Slunce, Jupiter, Saturn. Použitím aproximací ukázal, že uvažovaný systém je (v rámci použitých aproximací) stabilní – a “takovou hypotézu nepotřeboval” (s. 32).

Dnes si však plně uvědomujeme, že izolované systémy v našem vesmíru neexistují, neboť na každý hmotný objekt působí gravitace a další síly všech vesmírných objektů (resp. částic a jiných forem energie).

Po objevu a matematickém zpracování podivných atraktorů se vzápětí objevilo mnoho prací, které ukázaly, že sluneční soustava je podle očekávání rovněž chaotický systém [76-78]. Naštěstí to vypadá tak, že projevy chaotičnosti by se měly stát zřetelné až ve velmi daleké budoucnosti – po zhruba desítkách milionů let.

Systém Slunce – Jupiter – Saturn

Uvažujme tento systém jako příklad reálné soustavy tří těles. U parametrů uváděných v různých zdrojích je ale dost velký rozptyl [60, 61]. Zvolené hodnoty jsou shrnuty v následující tabulce (E-11 značí $\times 10^{-11}$, atd.)

Gravitační konstanta		$G = 6.67300000\text{E-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Slunce:	Hmotnost	$M = 1.98910000\text{E+30} \text{ kg}$
	Poloměr	$0.696\text{E+9} \text{ m}$
Jupiter:	Hmotnost	$m_J = 1.89860000\text{E+27} \text{ kg}$
	Perihelium	$r_{pJ} = 7.40742598\text{E+11} \text{ m}$
	Afelium	$r_{aJ} = 8.16081455\text{E+11} \text{ m}$
	Numer. excentricita trajektorie	$\varepsilon_J = 0.0483927$
Saturn:	Hmotnost	$m_S = 5.67460000\text{E+26} \text{ kg}$
	Perihelium	$r_{pS} = 1.34946738\text{E+12} \text{ m}$
	Afelium	$r_{aS} = 1.503\,983\,4\text{E+12} \text{ m}$
	Numer. excentricita trajektorie	$\varepsilon_S = 0.0541506$

Počáteční podmínky odhadneme zanedbáním vlivu druhé planety, tedy ze soustavy Slunce–planeta jako centrálního pole. Z geometrie elipsy se snadno odvodí, že čtverec podílu malé a velké poloosy

$$(b/a)^2 = 1 - \varepsilon^2,$$

kde ε je numerická excentricita. Poloměr křivosti ve vrcholech na hlavní ose je [12] (s. 102)

$$R = b^2/a = a(b/a)^2 = a(1 - \varepsilon^2).$$

Za počátek souřadného systému zvolíme střed Slunce a počáteční bod trajektorie planet umístíme do perihelia $(-a(1 - \varepsilon), 0)$. Počáteční rychlost planety v periheliu $v_p(0)$ a afeliu $v_a(0)$ se určí z rovnosti absolutních hodnot odstředivého zrychlení a gravitačního zrychlení $\frac{v_p^2(0)}{R} = \frac{GM}{r_p^2}$, $\frac{v_p^2(0)}{R} = \frac{GM}{r_p^2}$, tj.

$$|v_p(0)| = \frac{\sqrt{GM R_p}}{r_p} = \frac{\sqrt{GM a(1 - \varepsilon^2)}}{a(1 - \varepsilon)} = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_p + r_a} \frac{r_a}{r_p}}$$

$$|v_a(0)| = \frac{\sqrt{GM R_p}}{r_a} = \dots = \sqrt{\frac{2GM}{r_p + r_a} \frac{r_p}{r_a}} = |v_p(0)| \frac{r_p}{r_a}.$$

Počáteční rychlost Slunce volíme rovnu 0. Počáteční podmínky pro extrémní případ, kdy obě planety jsou v periheliích vlevo a dále je jedna v periheliu vlevo a druhá v periheliu vpravo, jsou odhadnuty takto:

$$\mathbf{x}_1^0(0) = (x_1(0), \dots, x_{12}(0))^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{pJ} \\ 0 \\ 0 \\ -v_{pJ}(0) \\ -r_{pS} \\ 0 \\ 0 \\ -v_{pS}(0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2^0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{pJ} \\ 0 \\ 0 \\ -v_{pJ}(0) \\ +r_{aS} \\ 0 \\ 0 \\ +v_{aS}(0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3^0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ +r_{aJ} \\ 0 \\ 0 \\ +v_{aJ}(0) \\ -r_{pS} \\ 0 \\ 0 \\ -v_{pS}(0) \end{pmatrix}.$$

Počáteční rychlosti vypočtené z eliptických drah v centrálním poli systému Slunce–planeta jsou uvedeny v následující tabulce.

Planeta	Rychlost $v_p(0)$, m/s	Rychlost $v_a(0)$, m/s
Jupiter	1.37085E+4	1.24401E+4
Saturn	1.01826E+4	0.91365E+4

V systému tří těles umístíme střed referenčního systému do těžiště soustavy. Dále označíme hmotnosti $m_1 = M$, $m_5 = m_J$, $m_9 = m_S$. Souřadnice Slunce, Jupitera, Saturnu jsou (x_1, x_3) , (x_5, x_7) , (x_9, x_{11}) , sudé indexy značí složky rychlostí. Počáteční poloha těžiště je tedy

$$\mathbf{x}_T^0(0) = (m_1 \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} + m_5 \begin{pmatrix} x_5^0 \\ x_7^0 \end{pmatrix} + m_9 \begin{pmatrix} x_9^0 \\ x_{11}^0 \end{pmatrix}) / (m_1 + m_5 + m_9),$$

vektor konstantní postupné rychlosti těžiště

$$\mathbf{v}_T^0(0) = (m_1 \begin{pmatrix} x_2^0 \\ x_4^0 \end{pmatrix} + m_5 \begin{pmatrix} x_6^0 \\ x_8^0 \end{pmatrix} + m_9 \begin{pmatrix} x_{10}^0 \\ x_{12}^0 \end{pmatrix}) / (m_1 + m_5 + m_9).$$

Dráha těžiště je pak

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_T^0(0) + \mathbf{v}_T^0(0) t$$

a v souřadném systému s počátkem v těžišti jsou derivace souřadnic

$$\frac{dx_{2k-1}}{dt}(t) = \begin{cases} x_{2k}(t) - (v_T^0)_1 & \text{pro } k \text{ liché,} \\ x_{2k}(t) - (v_T^0)_2 & \text{pro } k \text{ sudé.} \end{cases}$$

V případě počáteční podmínky (Jupiter i Saturn v periheliu)

$$\mathbf{x}_1^0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_{pJ} \\ 0 \\ 0 \\ -v_{pJ}(0) \\ -r_{pS} \\ 0 \\ 0 \\ -v_{pS}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7.40742598E+11 \\ 0 \\ 0 \\ -1.37085E+4 \\ -1.34946738E+12 \\ 0 \\ 0 \\ -1.01826E+4 \end{pmatrix}$$

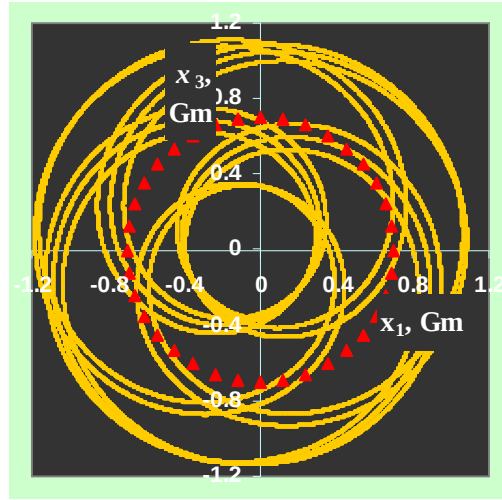
jsme dostali průsečíky s vodorovnou osou reprezentující perihelium a afelium (perihel a afel) v systému 3 těles. U Jupitera to bylo $(-739.651, 0)$ a $(813.732, 0)$, u Saturnu $(-1348.38, 0)$ a $(1491.53, 0)$. To umožňuje kontrolní výpočet excentricit

$$\epsilon_J = \frac{740.22-739.651}{740.22+739.651} = 0.04769, \quad \epsilon_S = \frac{1491.53-1348.38}{1491.53+1348.38} = 0.05041.$$

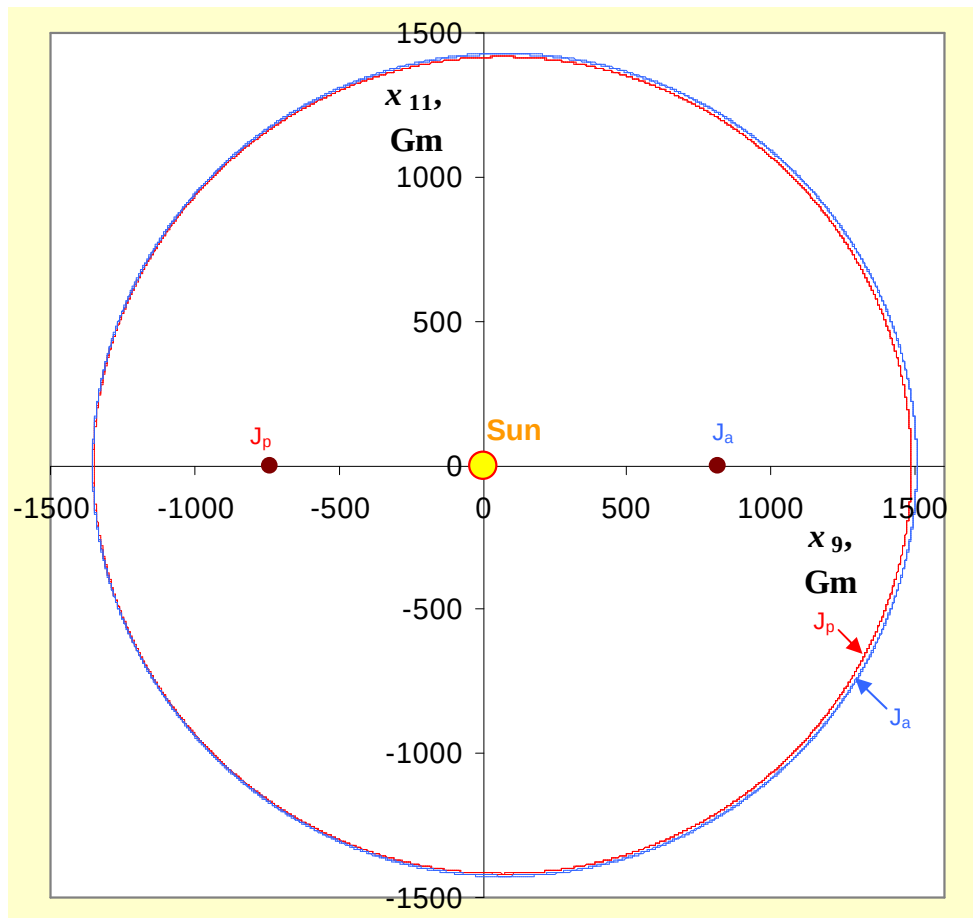
Periody oběhu dostaneme z počtu kroků integrace soustavy (S3) v referenční soustavě spojené s těžištěm. Počítali jsme s $h = 1800s$ ($\approx 1/2h$) a pro grafické znázornění jsme brali každý 48. bod, tj. po uplynutí 1 pozemského dne. Vyšlo $T_J = 4326$ dní, $T_S = 10674$ dní. Tyto výsledky a výsledky dalších výpočtů jsou přehledně uvedeny v následující tabulce. Místo milionu km píšeme Gm ($= 10^9m$).

Jup.	Sat.	r_{pJ} , Gm	r_{aJ} , Gm	ϵ_J	T_J , dny	r_{pS} , Gm	r_{aS} , Gm	ϵ_S	T_S , dny
Per.	Per.	-739.651	813.732	0.04769	4326	-1348.38	1491.53	0.05041	10674
Per.	Af.	-740.422	814.037	0.04749	4330	-1349.79	1509.88	0.05598	10784
Af.	Per.	-738.337	815.689	0.04978	4326	-1349.86	1508.99	0.05566	10789
Af.	Af.	-738.241	814.874	0.04934	4327	-1338.69	1502.78	0.05775	10689

Je až neuvěřitelné, jak udávané hodnoty numerické excentricity a period oběhu [60, 61], $\epsilon_J = 0.04839$, $T_J = 4\,333$ dní = 11.87 roků, $\epsilon_S = 0.05415$, $T_S = 10\,758 = 29.45$ let jsou blízké našim vypočteným hodnotám jednoho oběhu a s výjimkou T_J mezi ně dokonce zapadají.



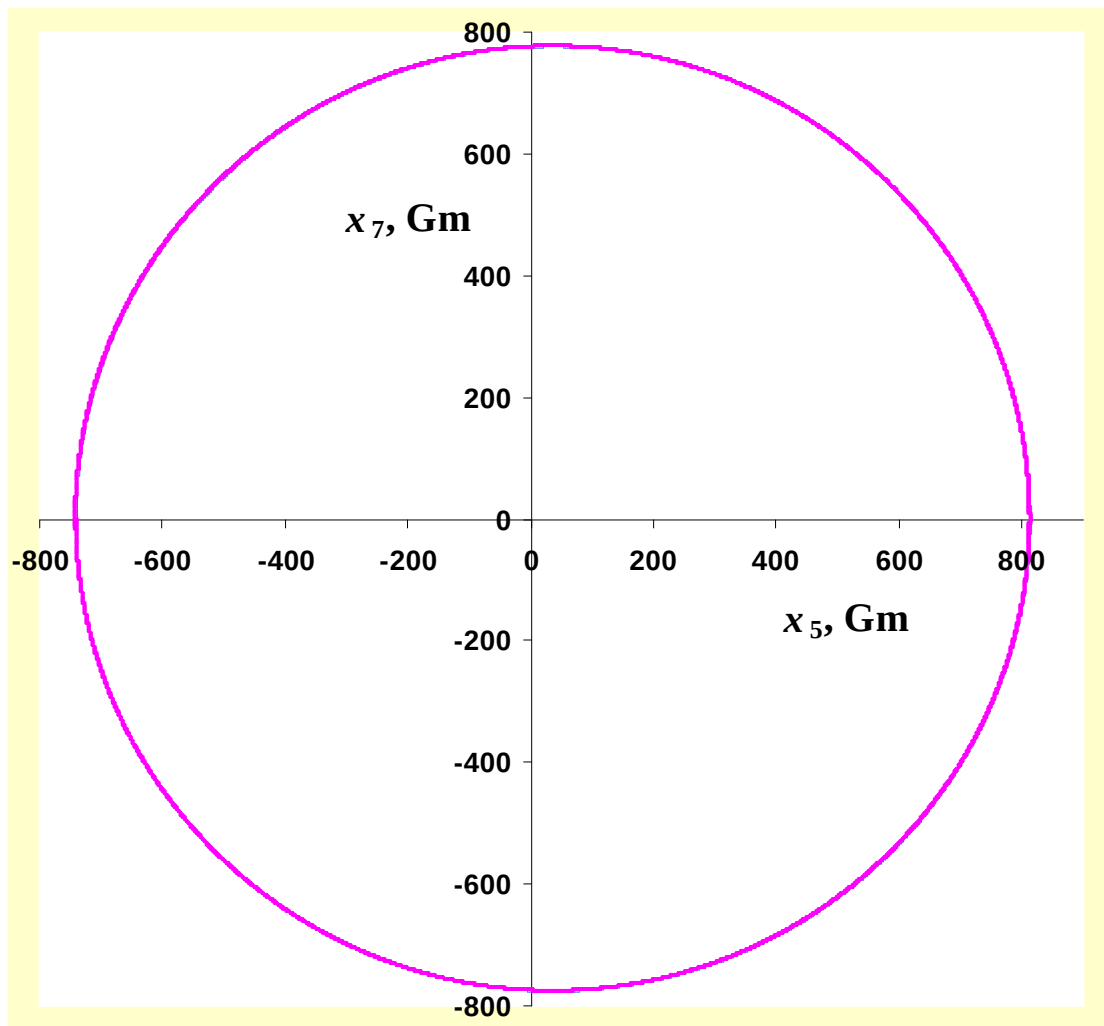
Obr. 37 – Trajektorie středu Slunce kolem těžiště (0, 0) systému Slunce – Jupiter – Saturn za 55 000 dní, tj. asi 150 let. Těžiště se dost často ocitá vně Slunce (poloměr disku Slunce je 0.7 Gm).



Obr. 38 – Trajektorie jednoho oběhu Saturnu se startem v perihelu, je-li Jupiter v perihelu (J_p) a afelu (J_a) ($1\text{ Gm} = 10^9\text{ m} = 10^6\text{ km}$).

Pohyb středu Slunce kolem těžiště (0, 0) uvažované soustavy ukazuje obr. 37. Je vidět, že těžiště se dost často nachází vně tělesa Slunce (tj. kružnice o poloměru 0.7 Gm).

U Saturnu se dá vliv polohy Jupitera v perihelu a afelu předvést i graficky (obr. 38). Vliv polohy Saturnu na trajektorii Jupitera je pochopitelně menší a v našem měřítku obě trajektorie splývají (obr. 39).



Obr. 39 – Trajektorie jednoho oběhu Jupitera se Saturnem v perihelu (červená) a afelu (modrá) jsou v tomto měřítku nerozlišitelné.

Obr. 38 a 39 ukazují, že i v modelu tří těles zůstávají trajektorie dvou největších planet sluneční soustavy přibližně eliptické. Poměr oběžných dob Saturnu a Jupitera se pohybuje kolem $5/2$, takže systém po nejmenším společném násobku $T \approx 5T_J \approx 2T_S \approx 21\,600$ dní ≈ 59 let by se měl vrátit do výchozího stavu. To by se dalo brát jako signál jeho stability.

Dnes však víme, že

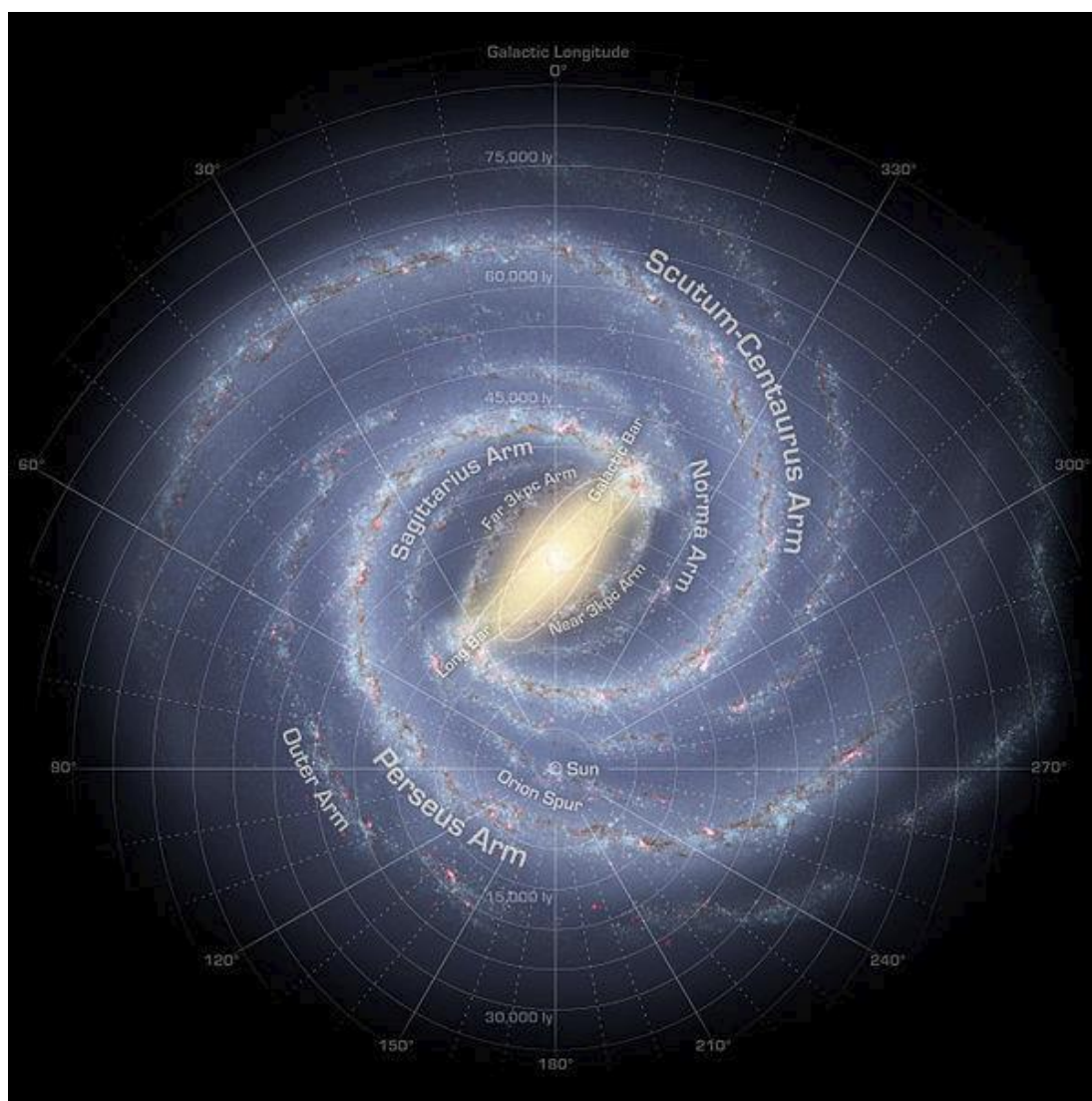
- kumulace velmi malých diferencí způsobí v dlouhém časovém horizontu velké změny a chaos,
- musí se projevit chaotičnost soustavy tří a více těles,
- jistě se projeví také relativistické efekty.

•

Už samotná možnost numerického řešení soustav diferenciálních rovnic je velmi inspirující. Možná, že Laplace byl úvahami o malé hustotě hmoty ve vesmíru, gravitaci, kondenzaci, lokálním shlukování a kolizích těles veden k domněnkám o mechanismech, jimiž mohly vznikat kosmické objekty. První zveřejněné pojednání takového druhu pochází od Immanuela Kanta (1724–1804). Kant vytvořil hypotézu mechanického vzniku kosmických těles z řídké vesmírné pralátky v klidu. Gravitace tuto pralátku přivede ke kondenzaci a postupnému lokálnímu zhušťování [79].

Laplace obohatil Kantovy představy tím, že do nich zahrnul rotaci hmoty a odstředivé zrychlení. Při pohledu na dnešní obraz Mléčné dráhy připomínající vír (obr. 40) nám to musí připadat velmi přirozené. Nesmíme ale zapomínat, že Laplace takové prostředky neměl.

(více např. <http://www.svetovejevy.cz/news/hypotezy-kantova-a-laplaceova/>)



Obr. 40 – Spirálová struktura naší galaxie připomíná vír (turbulenci), tedy typ proudění svázaný s rotací (http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way).

•

POZNÁMKA O PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH.

Na závěr ještě zmínka o tom, že Laplace se zabýval numerickým řešením parciálních diferenciálních rovnic. Nahradil parciální derivace podílem konečných diferencí a zabýval se konvergencí získaných diferenčních schémat. Patří tak mezi zakladatele metody známé dnes jako metoda sítí [80].

Jako příklad může sloužit Laplaceova rovnice u funkce $u(x, y)$ dvou proměnných

$$(\tilde{N}.\tilde{N}) u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Platí

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta^2 u(x, y)}{\Delta x^2} = \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{\Delta^2 u(x, y)}{\Delta y^2} = \frac{u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)}{k^2},$$

kde $h = \Delta x$ značí přírůstek proměnné x a $k = \Delta y$ přírůstek proměnné y .

U parciální diferenciální rovnice mohou být zadány počáteční podmínky (hodnoty u v čase 0, resp. t_0 , pokud je jednou proměnnou čas t) a okrajové podmínky na hranici prostorové oblasti, v níž rovnice platí. U stacionárního děje závislost na čase mizí a řešení je určeno jen okrajovými podmínkami. Typickým příkladem je rovnice vedení tepla, která při absenci vnitřních zdrojů a 'propadlišť' tepla přejde v Laplaceovu rovnici.

Rovinná oblast G , v níž platí rovnice

$$(\tilde{N}.\tilde{N}) u(x, y) = 0,$$

se v nejjednodušším případě rozdělí na stejné obdélníky $h \times k$. V bodech hranice ∂G oblasti G , jsou zadány okrajové podmínky hodnotami u (Dirichletova úloha), derivace u , obvykle ve směru vnější normály (Neumannova úloha), atd. Hodnoty u ve vnitřních bodech (x_i, y_j) se postupně počítají z diferenčních rovnic. Když oblast ani její hranice nejsou příliš složité, dá se pro přenos hodnot u z hranice ∂G do okrajových uzlů sítě a dál do vnitřních uzlů použít interpolace. Pak rovnice $(\tilde{N}.\tilde{N}) u(x, y) = 0$ vede k systému lineárních algebraických rovnic pro neznámé $u_{ij} = u(x_i, y_j)$. To je princip metody sítí.

Elementy sítě se nemusí omezovat na obdélníkové. Mohou být trojúhelníkové, šestiúhelníkové apod. Také k přenosu okrajových podmínek do hraničních bodů sítě lze použít kvalifikovanějších metod [80].

V dnešní době metodu sítí do značné míry nahradila metoda konečných prvků, FEM. Její aplikace mají silnou technickou podporu ve formě komerčně dostupných softwarových balíčků.

Zde se omezíme jen na tuto poznámku. Seriózní výklad metody sítí lze najít např. v knize [80] nebo na internetu.



ODKAZY

1. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Laplace.html> (C.V.).
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace (C.V.).
http://www.1911encyclopedia.org/Pierre_Simon_Marquis_De_Laplace .
http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/120825/CasPestMatFys_056-1927-4_7.pdf .
<http://www.nndb.com/people/871/000031778/> .
3. http://cs.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_de_Laplace (C.V. český).
4. http://www.zas.cz/prednasky/prednaska_koutny_euler.pdf (Euler).
5. http://cs.wikipedia.org/wiki/Bitva_u_Waterloo .
<http://www.mathpages.com/home/kmath270/kmath270.htm> (Napoleon: srdce trojúhelníka).
http://cs.wikipedia.org/wiki/Napoleonovo_egyptsk%C3%A9_t%C5%BEn%C3%AD .
<http://www.daviddarling.info/encyclopedia/B/Bonaparte.html> (Napoleon – člen Institutu).
6. <http://www.cs.xu.edu/math/Sources/Laplace/index.html> (Laplace's works – Théorie analytique des Probab.)
<http://www.cs.xu.edu/math/Sources/Laplace/index.html> (Laplace on Probability and Statistics).
7. www.koutny-math.com (Prelude to Probability and Statistics) nebo
 KOUTNÝ, F: *Matematická statistika*, ISBN 80-7318-289-0, Skriptum UTB Zlín 2005.
8. RÉNYI, A.: *Teorie pravděpodobnosti*. Academia Praha 1972.
9. STRUIK, D. J.: *Dějiny matematiky*. ORBIS Praha 1963.
10. http://en.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre .
11. Van der WAERDEN, B. L.: *Mathematical Statistics*. Springer Verlag, New York 1969.
12. www.koutny-math.com (Mathematical Base for Applications).
13. www.koutny-math.com (Elementary Numerical Methods & Fourier Analysis).
14. <http://www.zas.cz/download/gauss.pdf> (str. 22).
15. http://en.wikipedia.org/wiki/Error_function (erf(x)).
16. http://cs.wikipedia.org/wiki/Bayesovsk%C3%A1_statistika .
17. <http://web.cvut.cz/ki/710/pdf/kap2.pdf> .
18. http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Bayes .
19. <http://www.zas.cz/download/newton-predn.pdf> (Newton).
20. ANDĚL, J.: *Matematická statistika*. SNTL Praha 1978.
21. <http://www.amstat.org/sections/srms/news.sum01.pdf> (odhad počtu obyvatel, historie).
22. PÍRKO, Z. – VEIT, J.: *Laplaceova transformace*. SNTL Praha 1970.
23. VORÁČEK, J.: *Úvod do operátor. počtu a Laplaceovy transformace*. Skriptum UP Olomouc 1969.
24. DITKIN, V. A. – KUZNEČOV, P. J.: *Průručka operátorového počtu*. NČSAV Praha 1954.
25. <http://en.wikipedia.org/wiki/Vibration> (lin. oscilace).
26. <http://euler.us.es/~renato/textos/teaching-math-arnold.pdf> (Arnold: O vyučování matematiky).
27. http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_Laplace_transform (Mellinova inverzní formule).
http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform#History .
28. ANDĚL, J.: *Statistická analýza časových řad*. SNTL Praha 1976.
29. RUDIN, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*. Academia Praha 1977.
30. KOŘÍNEK, V.: *Základy algebry*. NČSAV Praha 1956.
31. BRDIČKA, M.: *Mechanika kontinua*. NČSAV Praha 1959.
32. TICHONOV, A. N. – SAMARSKIJ, A. A.: *Rovnice matematické fyziky*. NČSAV Praha 1955.
33. PETROVSKIJ, I. G.: *Parciální diferenciální rovnice*. Přírodověd. vydav. Praha 1952.
34. <http://www.math.muni.cz/~pospisil/FILES/RovMatFyz.pdf> (Parciální Dif. Rov.).
35. <http://www.kubaz.cz/texty/UvodDoTeorieParcialnichDiferencialnichRovnic.pdf> (Parciální Dif. Rov.)

36. http://en.wikipedia.org/wiki/Black_hole .
37. THORNE, K. S.: Černé díry a zborcený čas. Mladá fronta Praha 2004.
38. KULHÁNEK, P.: Astronomie a fyzika – nové obzory. ISBN 978-80-904582-0-8. Severografia a.s. 2010.
39. http://cs.wikipedia.org/wiki/Edwin_Hubble .
40. http://en.wikipedia.org/wiki/Doppler_effect .
41. http://en.wikipedia.org/wiki/Hubble's_law .
42. http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace's_demon .
43. http://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_chaosu .
44. http://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound .
45. http://en.wikipedia.org/wiki/Supersonic_speed (zvuková bariéra).
46. <http://www.nd.edu/~powers/ame.20231/finn1964.pdf> (Laplace a rychlost zvuku).
47. http://en.wikipedia.org/wiki/Underwater_acoustics .
48. http://cs.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci#Knihovna .
49. <http://www.photopoly.net/45-most-beautiful-morning-dew-photos/> (krásná foto rosy).
50. http://cs.wikipedia.org/wiki/Povrchov%C3%A9_nap%C4%Bt%C3%AD (povrchové napětí).
51. <http://www.converter.cz/tabulky/povrchove-napeti.htm> (tabulka).
52. <http://fyzika.jreichl.com/index.php?sekce=browse&page=643> (kapilarita).
53. http://en.wikipedia.org/wiki/Capillary_action (kapilarita).
54. <http://cs.wikipedia.org/wiki/Zem%C4%B9> (Země).
55. http://en.wikipedia.org/wiki/File:GRACE_globe_animation.gif (tvar Země).
56. [http://en.wikipedia.org/wiki/Mercury_\(planet\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Mercury_(planet)) .
57. <http://en.wikipedia.org/wiki/Venus> .
58. <http://en.wikipedia.org/wiki/Earth> .
59. <http://en.wikipedia.org/wiki/Mars> .
60. [http://cs.wikipedia.org/wiki/Jupiter_\(planeta\)](http://cs.wikipedia.org/wiki/Jupiter_(planeta)) (<http://en.wikipedia.org/wiki/Jupiter>) .
61. [http://cs.wikipedia.org/wiki/Saturn_\(planeta\)](http://cs.wikipedia.org/wiki/Saturn_(planeta)) (<http://en.wikipedia.org/wiki/Saturn>) .
62. <http://en.wikipedia.org/wiki/Uranus> .
63. <http://en.wikipedia.org/wiki/Neptune> .
64. http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_period (periody rotace planet).
65. http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics (sférické harmonické).
66. http://cs.wikipedia.org/wiki/Sf%C3%A9rick%C3%A9_harmonick%C3%A9_funkce .
67. http://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb's_law .
68. KOUTNÝ, F., "Analytical Comments on Radial Tire Nonuniformity", Tire Science and Technology, Vol. 24, No. 2, pp. 132–152, 1996.
69. http://cs.wikipedia.org/wiki/Keplerovy_z%C3%A1kony (Kepler $\Rightarrow$ Newton).
70. KVASNICA, J. aj.: Mechanika. Academia Praha 1988.
71. OBETKOVÁ, V. – MAMRÍLOVÁ, A. – KOŠINÁROVÁ, A.: *Teoretická mechanika*. Alfa Bratislava 1990.
72. ANDRLE, P.: Základy nebeské mechaniky. Academia Praha 1971, nebo <http://www.vurv.cz/cspp/ZNM.pdf> .
73. http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse-square_law (Hooke $\rightarrow$ Newton).
74. <http://www.zas.cz/download/newton-predn.pdf> (Newton).
75. <http://www.iep.utm.edu/poincare/> (Poincaré).
76. <http://www.cft.edu.pl/edu/karol/003.pdf> (stabilita sluneční soustavy).
77. <http://www.computing.edu.au/~bvk/astronomy/HET602/project/docs/HET602Project.pdf> (stab. sl. s.).
78. GRYGAR, J.: http://www.v-art.cz/chudove_koreny/r02c02/studovna grygar_chaos.htm .
79. <http://arthursclassiconovels.com/science/nathis10.html> (Kant: Universal natural History...).
80. VITÁSEK, E.: Numerické metody. SNTL Praha 1987.